1

TADEUSZ CZEŻOWSKI
PROFESOR UNIWERSYTETU TORUŃSKIEGO

LOGIKA

Podręcznik
dla studiujących nauki filozoficzne

PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH
WARSZAWA 1948

Podpisano do druku dn. Zarządz. 776 E-0000000 Nakład [illegible]000 egz.
Arkuszy druku.: Papier w form. 70×100 cm, 000 g, 00 kl. Zamówienie nr 2785

ZAKŁ. GRAF. PAŃSTWOWYCH ZAKŁADÓW WYDAWNICTW SZKOLNYCH
W BYDGOSZCZY

PRZEDMOWA

Książka niniejsza jest podręcznikiem przedstawiającym współczesny stan logiki w zakresie, jaki jest potrzebny wszystkim pracownikom na polu nauk filozoficznych. Obejmuje ona tylko zagadnienia logiki i jej metodologii, z wyłączeniem zagadnień epistemologicznych i metodologicznych w szerszym znaczeniu. Zgodnie z współczesnym stanem badań logicznych duży nacisk położono na ich podstawy semantyczne. Zostały uwzględnione wszystkie działy wchodzące zwykle w wykład logiki łącznie z teorią stosunków, a nadto logiczna teoria prawdopodobieństwa, jako podstawa dla wniosków prawdopodobieństwowych i logik wielowartościowych. Dołączono zarys historycznego rozwoju logiki w oświetleniu, jakiego dostarcza jej stan dzisiejszy; dopiero to oświetlenie pozwala należycie rozumieć jej dzieje, jak z drugiej strony znajomość historii logiki jest niezbędnym uzupełnieniem znajomości tej nauki w obecnym jej stanie.

Starałem się podać wyniki badań zawarte nie tylko w dobrze znanych opracowaniach ogólnych, lecz także w artykułach drukowanych w czasopismach i drobniejszych przyczynkach, zwłaszcza w bogatej pod tym względem polskiej literaturze logicznej ostatnich czasów. Mój wkład osobisty polega na zebraniu i zreferowaniu tych wyników. Źródła, z których czerpałem, są wymienione w *Przypisach*, zbyt trudno jednak byłoby wyszczególnić przy każdej nowej myśli, czyją jest ona własnością. Obeznany ze współczesnym ruchem logicznym, krytyk rozróżni bez trudu, co jest zaczerpnięte od innych i skąd, a co pochodzi ode mnie. *Przypisy*, oprócz wskazania źródeł, mają za zadanie wskazać studiującym literaturę z dziedziny logiki do dalszej pracy. Dlatego starałem się nie pominąć żadnej ważniejszej pozycji bibliograficznej z lat ostatnich. Ażeby nie przerywać toku wykładu w tekście, zebrałem *Przypisy* w całość na końcu książki, dzieląc je według dyspozycji tekstu. W przypisach i odsyłaczach wskazuję część, rozdział i paragraf tekstu liczbą złożoną z ich numerów porządkowych; tak np. „321" odsyła do części trzeciej, drugiego rozdziału, pierwszego paragrafu; takie same oznaczenia wprowadziłem do paginacji. Unikam podawania przy tekście odsyłaczy do *Przypisów*, by nie przeszkadzać Czytelnikowi w lekturze. Według wskazanej wyżej zasady są numerowane także twierdzenia i definicje, przy czym definicje odróżniam cyframi rzymskimi.

Zdaję sobie sprawę z trudności zadania, którego się podjąłem, i z tego, iż siły moje nie zawsze wystarczają, aby mu podołać. Toteż liczę się z tym, że książka daleka jest od spełnienia wymagań całkowitej ścisłości. Zobowią-

załem się do napisania jej pod wpływem zachęty z zewnątrz, która mi dodała otuchy. Będę wdzięczny wszystkim Czytelnikom, którzy zechcą wskazać mi zauważone usterki i podać swoje uwagi krytyczne.

Książka była pisana w czasie wojny i przy pisaniu jej mogłem posługiwać się tylko literaturą, którą posiadałem na miejscu. Przejścia lat ostatnich oderwały mnie również od tej literatury, tak że przy ostatecznej rewizji tekstu niestety nie wszystkie odsyłacze mogłem sprawdzić i uzupełnić, stąd przeto pochodzi niejedna luka lub niedokładność.

Jestem winien osobne wyrazy podziękowania Panu prof. dr Maksymilianowi Huberowi, Przewodniczącemu Komisji Podręczników Akademickich, który w r. 1938 dał inicjatywę do napisania tej książki, Panu Koledze prof. dr Stanisławowi Jaśkowskiemu, który zechciał przejrzeć rękopis przed oddaniem go do druku i udzielił mi cennych wskazówek, panu dr Franciszkowi Indanowi, asystentowi Seminarium Filozoficznego w Wilnie, a potem w Toruniu, który poświęcił wiele czasu i trudu na przygotowanie rękopisu do druku oraz sporządzenie rysunków i indeksu — a wreszcie Państwowym Zakładom Wydawnictw Szkolnych za uprzejme i życzliwe uwzględnienie dezyderatów autora przy wydaniu książki.

Tadeusz Czeżowski

Toruń, w maju 1948 r.

Część I

Zasady semantyczne

Rozdział 1. O znakach

1. Asocjacyjna teoria znaków i teoria intencji znaczeniowej

Stosunek oznaczania zachodzący między dwoma przedmiotami, z których pierwszy nazywamy znakiem, drugi zaś przedmiotem oznaczonym lub desygnatem znaku, charakteryzuje się pod względem psychologicznym tak, iż jeżeli osoba, dla której zachodzi stosunek oznaczania, spostrzeże znak lub w pewien inny sposób o nim pomyśli, to myśli zarazem o przedmiocie oznaczonym. Nazwa „znak" jest nazwą względną, mianowicie przysługuje przedmiotom ze względu na trójczłonowy stosunek oznaczania między znakiem, przedmiotom oznaczonym i osobą, dla której ów stosunek zachodzi; innymi słowy, każdy znak jest znakiem czegoś dla kogoś.

Między znakiem i przedmiotem oznaczonym zachodzi niekiedy stosunek przyczyny do skutku lub skutku do przyczyny (gdy np. strzał za sceną jest znakiem śmierci bohatera sztuki, dym jest znakiem ognia), niekiedy stosunek podobieństwa (onomatopeje, pismo obrazkowe), niekiedy stosunek ekspresji psychologicznej (wykrzykniki, gestykulacja, mimika twarzy jako znaki przeżyć); bywa też, że pewne przedmioty stają się znakami dzięki zwyczajowi (odkrycie głowy znakiem powitania lub szacunku) lub wskutek umyślnie wprowadzonej umowy (sygnały kolejowe, znaki telegraficzne). Jednakowoż stosunek oznaczania, jeżeli nawet powstał w związku z którymkolwiek z tamtych stosunków, jest od nich wszystkich różny.

Istnieją dwie teorie dotyczące psychologicznej natury stosunku oznaczania: teoria asocjacyjna i teoria intencji znaczeniowej. Według teorii asocjacyjnej stosunek oznaczania między znakiem i przedmiotem oznaczonym polega na tym, że między myślą o znaku i myślą o przedmiocie oznaczonym istnieje skojarzenie, dzięki któremu myśl o znaku wywołuje myśl o przedmiocie oznaczonym. Według teorii asocjacyjnej myśl o znaku jest asocjacyjnym motywem myśli o przedmiocie oznaczonym; myślenie za pomocą znaków odbywa się niejako w dwóch etapach: najpierw mamy myśl o znaku, potem myśl o przedmiocie oznaczonym. Dopiero nabywszy wprawy w posługiwaniu się znakiem dochodzimy do tzw. myślenia symbolicznego, to jest do zautomatyzowanego

posługiwania się znakiem, przy którym nie uświadamia się myśl o przedmiocie oznaczonym, lecz sama myśl o znaku wystarcza do właściwego posługiwania się nim przy myśleniu w rozmaitych związkach o przedmiocie oznaczonym.

Według teorii intencji znaczeniowej skojarzenie między myślą o znaku i myślą o przedmiocie oznaczonym odgrywa rolę przy powstaniu stosunku oznaczenia, lecz nie jest z tym stosunkiem identyczne. Stosunek między myślą o znaku i myślą o przedmiocie oznaczonym jest, według tej teorii, ściślejszy aniżeli stosunek motywacji skojarzeniowej. Myśl o przedmiocie za pośrednictwem znaku nie rozkłada się na dwa etapy, lecz jest jednolitą całością, jak myśl jakakolwiek. Albowiem myśl każda jest całością, w której skład wchodzi pewna treść zmysłowa lub psychiczna oraz intencja, czyli odniesienie tej treści do jakiegoś przedmiotu. Gdy myślę np. w tej chwili o Tatrach widzianych z Turbacza, to w skład tej myśli wchodzi przypomnienie treści dawniejszego spostrzeżenia jako pewien widok odtwórczy oraz intencja odnosząca ów widok do pasma górskiego Tatr. Gdy myślę o przedmiocie za pośrednictwem znaku, to dana jest mi treść zmysłowa stanowiąca widok znaku oraz intencja, przez którą odnoszę ową treść do przedmiotu będącego znakiem; jednakowoż intencja nie zatrzymuje się na tym przedmiocie, lecz przenika go niejako i kieruje się poprzez niego do przedmiotu oznaczonego. Dzięki temu myśl o znaku staje się myślą o przedmiocie oznaczonym, czyli otrzymuje intencję znaczeniową. Treść zmysłowa stanowiąca widok znaku prezentuje przedmiot oznaczony, nie potrzeba w tym celu odrębnej treści, widoku przedmiotu oznaczonego, co zakłada teoria asocjacyjna, gdy przypuszcza, że myśl o znaku i myśl o przedmiocie oznaczonym są dwiema odrębnymi myślami występującymi łącznie dzięki skojarzeniu. Gdy np. posługuję się słowem „las" jako znakiem dla oznaczonego nim przedmiotu, to treść zmysłowa widoku wzrokowego lub słuchowego tego słowa prezentuje przedmiot oznaczony bez względu na to, czy i jakie widoki lasu nasuwają się wskutek skojarzenia (także teoria asocjacyjna liczy się z tym faktem, gdy mówi o myśleniu symbolicznym, przy którym brak reprodukcji skojarzeniowej). Dzięki wspólnej intencji znaczeniowej różne znaki tego samego przedmiotu stają się równoznaczne mimo różnej treści prezentującej; tak np. okrzyk „dym", wydany przez wędrowca w puszczy — jeżeli dym jest dlań znakiem ognia — jest równoznaczny z okrzykiem „pali się", a zniecierpliwienie człowieka zwykle spokojnego jako znak zmęczenia jest równoznaczne ze słowami „jestem zmęczony".

2. Znaki wyrazowe

Oddzielną grupę znaków tworzą te, które powstają jako wytwory czyjejś działalności psychofizycznej. Takimi są gesty, słowa, napisy, rysunki itp. Warunkiem powstania takiego przedmiotu lub zjawiska jest zjawisko psychiczne jego twórcy, które uzewnętrznia się, czyli wyraża się, w owym wytworze: tak np. radość lub cierpienie wyraża się w mimice twarzy lub w wykrzykniku,

myśl wyraża się w słowie lub w piśmie, zamiar twórczy artysty wyraża się w dziele sztuki. Wytwór psychofizycznej działalności, w którym wyraża się zjawisko psychiczne, jest wyrazem tego zjawiska. Stosunek wyrażania się między zjawiskiem psychicznym i odpowiadającym mu wyrazem przekształca się na stosunek oznaczania między wyrazem jako znakiem oraz zjawiskiem psychicznym jako przedmiotem oznaczonym, jeżeli istnieje osoba, dla której ów wyraz staje się znakiem zjawiska psychicznego. W tym przypadku wyraz wyraża wobec danej osoby zjawisko psychiczne wyrażające się w nim tj. komunikuje owo zjawisko psychiczne danej osobie lub informuje ją o nim. Tak np. okrzyk, w którym wyraża się przerażenie, tylko wtedy będzie wyrażał to przerażenie, jeżeli słyszący go osobnik pomyśli, iż ktoś, kto wydał okrzyk, jest przerażony. Osoba, dla której wyraz pewnego zjawiska psychicznego wyraża je, która przeto spostrzegając lub przypominając sobie wyraz, myśli zarazem o owym zjawisku psychicznym, rozumie dany wyraz.

Wyrazami wyrażającymi zjawiska psychiczne są przede wszystkim wypowiedzi słowne języka mówionego lub pisanego, które będziemy nazywać wyrażeniami. Są one znakami zjawisk psychicznych; jeżeli zaś zjawisko psychiczne jest myślą, czyli przedstawieniem lub przekonaniem, stają się one zarazem znakami przedmiotów owych myśli. Słowa „ulica Zamkowa" wyrażają myśli osoby, która je wypowiada, myślą tą jest przedstawienie ulicy Zamkowej; zarazem zaś oznaczają one ulicę Zamkową jako przedmiot owej myśli — jedno czy drugie zależy od kontekstu lub konsytuacji, które wskazują kierunek skojarzenia lub intencji. Zarówno teoria asocjacyjna stosunku oznaczania, jak teoria intencji znaczeniowej każą rozumieć psychologiczny podkład tego stosunku jako dyspozycję: pierwsza jako dyspozycję do reprodukcji skojarzeniowej, druga natomiast jako dyspozycję do uznawania pewnych zdań o przedmiocie oznaczonym. Teoria asocjacyjna wiąże wyrażenia z przedstawieniami przedmiotów oznaczonych, teoria intencji znaczeniowej — z przekonaniami o tych przedmiotach; pierwsza odpowiada allogenicznej (arystotelesowskiej) teorii sądów, traktującej je jako połączenia przedstawień, druga — teorii idiogenicznej (stoickiej), uważającej sądy za swoiste elementy myśli. Współczesna logika pojmuje po stoicku zdania jako elementy logiczne języka. Dalsze wywody będą rozwijały się przeto w myśl teorii intencji znaczeniowej. Prawo psychologii głosi, że przedstawienie przedmiotu staje się w sprzyjających okolicznościach motywem przekonania o tym przedmiocie: wyobrażenie spostrzegawcze dla przekonania spostrzeżeniowego, odtwórcze dla przypomnieniowego, pojęcie dla przekonań analitycznie wywodzonych z jego treści. Stosunek oznaczania polega na tym, że przedstawienie znaku staje się w zastępstwie przedstawienia przedmiotu motywem przekonania, które uzewnętrznia się przez uznanie wyrażającego je zdania — lub innymi słowy: intencja znaczeniowa wyrażenia jest dyspozycją do uznawania pewnych zdań zawierających to wyrażenie. Tak np. odczytanie napisu „Ulica Zamkowa" na tablicy u po-

czątku ulicy Zamkowej staje się motywem dla przekonania uzewnętrznionego przez uznanie zdania „oto jest ulica Zamkowa", a znak „a^2" podobnie staje się motywem, aby uznać zdanie „oto jest iloczyn „$a \cdot a$". Natomiast te same słowa „ulica Zamkowa" wypowiedziane przeze mnie w sytuacji, w której nie stają się one motywem dla stwierdzenia „oto jest ulica Zamkowa", są znakiem myśli o ulicy Zamkowej i stają się dla mego towarzysza motywem dla stwierdzenia, że myślę o ulicy Zamkowej.

Znak oznaczający dla pewnej osoby jakiś przedmiot staje się znakiem tegoż przedmiotu dla innej osoby dzięki takiemu mniej więcej procesowi, jaki stosuje metoda bezpośrednia przy uczeniu języka obcego. Uczenie metodą bezpośrednią polega na tym, że wskazuje się uczniowi łącznie wyrażenie obcego języka i przedmiot, którego owo wyrażenie jest znakiem. Dzięki temu wytwarza się w umyśle ucznia skojarzenie między wyrażeniem i przedmiotem przez nie oznaczonym. Jednakże jeszcze nie to jest momentem istotnym dla ustanowienia stosunku oznaczania. Wskazanie np. deszczu za szybą okna jest sposobem dla wywołania wyobrażenia spostrzegawczego motywującego przekonanie spostrzeżeniowe, że deszcz pada. Jeżeli łącznie z tym poddajemy wyrażenie „deszcz" lub „deszcz pada", to nabywa ono intencji znaczeniowej, dzięki której staje się w zastępstwie wyobrażenia spostrzegawczego deszczu motywem dla stwierdzenia, że deszcz pada. Cały proces można by w sposób odpowiedni pojąć analogicznie do wytwarzania odruchów uwarunkowanych metodą Pawłowa: Słowo „deszcz" zamiast spostrzeżenia deszczu wystarcza do wywołania przekonania, iż deszcz pada, podobnie jak bodziec uwarunkowany wyzwala odruch uwarunkowany, wchodząc w miejsce pierwotnego bodźca specyficznego dla danego odruchu. Być może, że uczeń zastosuje znak niewłaściwie np. dla oznaczenia chmury deszczowej i kiedykolwiek spostrzeżenie nadciągającej chmury przyjmie za motyw do uznania za prawdziwe zdania „oto jest deszcz"; wtedy rzeczą nauczyciela jest skorygowanie nieporozumienia przez odrzucenie owego zdania.

Jeżeli przeto pewne osoby używają jakiegoś wyrażenia jako znaku na oznaczenie tego samego przedmiotu, to osoby owe zgodnie uznają za prawdziwe pewne zdania zawierające odnośne wyrażenie i zgodnie odrzucają inne zawierające je zdania. Niezgodność zaś pod tym względem, jeśli nie jest spowodowana omyłką przypadkową u którejś z osób, wskazuje niechybnie na różnicę w oznaczonym przedmiocie. Twierdzę np., że widziałem Jana tutaj, ktoś drugi zaś przeczy mi twierdząc, że w tymże czasie widział Jana gdzie indziej; niezgodność ta każe uznać, że jeden z nas wziął inną osobę za Jana, że „Jan" w tym przypadku oznacza dla każdego z nas inny przedmiot.

Aby zaś jakikolwiek przedmiot nie będący wyrażeniem stał się dla kogoś znakiem innego przedmiotu, trzeba również — jak przy stosowaniu metody bezpośredniej — wskazać łącznie przedmiot, który ma być znakiem (np. dym), i przedmiot, który ma być oznaczony (np. ogień). Spostrzeżenie dymu jest

motywem uznania za prawdziwe zdania „dymi się", podobnie spostrzeżenie ognia prowadzi do asercji „pali się"; zarazem zaś spostrzeżenie dymu staje się motywem do uznania za prawdziwe zdania „pali się". Stosunek między znakiem, przedmiotem oznaczonym i wyrażeniem (zdaniem) oznaczającym ten sam przedmiot polega na tym, iż spostrzeżenie znaku wystarcza zamiast spostrzeżenia przedmiotu oznaczonego jako motyw do uznania prawdziwości dotyczącego wyrażenia. Dym przeto jest znakiem ognia, a czerwony sygnał kolejowy znakiem zamkniętego toru dla wszystkich osób (i tylko dla tych), dla których spostrzeżenie dymu lub czerwonego sygnału jest motywem uznania za prawdziwe zdania „pali się" lub odpowiednio „tor jest zamknięty". Nie jest dym znakiem ognia dla kogoś, kto spostrzegając dym nie uzna zdania „pali się" za prawdziwe. Jeżeli zaś daleki huk jest dla kogoś motywem uznania, że grzmi, dla kogoś zaś innego, że armaty strzelają, to huk ten w każdym z obu przypadków jest znakiem innego przedmiotu.

Mówiąc o związku oznaczania między znakiem i przedmiotem oznaczonym mamy zazwyczaj na myśli nie związek między dwoma przedmiotami indywidualnymi, lecz związek między dwoma zbiorami przedmiotów. Jeżeli posługujemy się pewnym znakiem wielokrotnie lub stale dla oznaczenia przedmiotów pewnego rodzaju (jak np. podniesienie ramienia semafora kolejowego jest znakiem dozwolonego przejazdu), to mamy do czynienia ze zbiorami obejmującymi tyle indywidualnych znaków (podniesienie ramienia semafora) i tyle przedmiotów oznaczonych (dozwoleń przejazdu), ile razy został dany znak zastosowany. Gdy twierdzimy, że wyraz „sosna" w języku polskim jest znakiem oznaczającym jedno z drzew szpilkowych, to w istocie rzeczy stosunek oznaczania zachodzi między dowolnym elementem zbioru napisów lub dźwięków „sosna", odpowiadających zasadom pisania i mówienia po polsku oraz dowolnym elementem zbioru drzew będących sosnami. Ustalając przeto stosunek oznaczania określamy zazwyczaj zarówno znak, jak przedmiot oznaczony w sposób ogólny. Wszystkie znaki indywidualne czyniące zadość określeniu nazywamy r ó w n o k s z t a ł t n y m i, wszystkie przedmioty, które według określenia są oznaczone przez którykolwiek ze znaków równokształtnych, nazywamy jego desygnatami. Stosunek wyrażania się polega podobnemu uogólnieniu. Mówiąc, że zjawisko psychiczne *P* wyraża się wyrazem *W*, stwierdzamy, że jakiekolwiek zjawisko psychiczne należące do zbioru zjawisk *P* wyraża się pewnym wyrazem spomiędzy wyrazów należących do zbioru wyrazów *W*.

Doniosłość poprzedzających rozważań polega na tym, że pozwalają one na jednolite ujęcie procesów znakotwórczych w różnych dziedzinach wiedzy i praktyki, których dotyczyły dotychczas omawiane przykłady, oraz w naukach dedukcyjnych, w szczególności w tzw. systemach sformalizowanych, to jest w najbardziej ścisłej ich postaci. Stwierdziliśmy, że jeżeli jakieś wyrażenie jest znakiem pewnego przedmiotu, to myśl o znaku staje się zamiast myśli

o przedmiocie motywem dla uznania określonych zdań o nim. Lecz i odwrotnie, jeżeli uznajemy określone zdania o pewnych przedmiotach, to zdania te nadają znakom tych przedmiotów występującym w owych zdaniach właściwe im znaczenie. Tak właśnie dzieje się w systemach sformalizowanych nauk dedukcyjnych, w których wprowadza się terminy pierwotne przez aksjomaty systemu. Terminy pierwotne są znakami, które uzyskują właściwe sobie znaczenie w ten sposób, iż pewne zdania zawierające je zostają uznane za prawdziwe jako aksjomaty systemu.

Zachodzi jednak różnica między przykładami znaków, które poprzednio rozpatrywaliśmy, a wyrażeniami systemów sformalizowanych. W naszych przykładach przyjmowaliśmy domyślnie, że przedmioty oznaczone przez znaki są przedmiotami empirycznymi. Wyrażenia systemów sformalizowanych są znakami w szerszym znaczeniu tego wyrazu, albowiem nie podobna wskazać odpowiadających im przedmiotów empirycznych. W związku z tym pozostaje druga różnica, mianowicie aksjomaty systemów sformalizowanych przyjmuje się wprost, bez oparcia się o spostrzeżenia, natomiast gdy chodzi o znaki przedmiotów empirycznych, uznanie wyrażeń decydujących o roli znaku uzależnia się od sytuacji danej w spostrzeżeniu.

Rozdział 2. O języku

1. Słownik, dyrektywy składni i dyrektywy sensu

Osoby mówiące pewnym językiem posługują się wyrażeniami tego języka jako wspólnymi dla siebie znakami. Wśród wyrażeń rozróżniamy proste, np. „ręka", „dobry", „tak", i złożone np. „silna ręka", „pies biegnie przez pole". Wyrażenia proste i składniki proste wyrażeń złożonych nazywamy wyrazami (także słowami lub częściami mowy, termin „wyraz" jest dwuznaczny, por. 112). Nie każdy wyraz jest znakiem, np. wyrazy języka polskiego „i", „lub", „starszy" nie są znakami, lecz jedynie częściami znaków. Spis wyrazów pewnego języka tworzy jego słownik.

Sposoby łączenia wyrazów celem otrzymania wyrażeń złożonych danego języka nie są dowolne. Winny one stosować się do dyrektyw syntaktycznych, czyli do praw składni tego języka. Wyrazy pewnego języka i dozwolone według praw składni tego języka wyrażenia złożone posiadają sens w danym języku, czyli (jak mówi się czasem) są wyrażeniami sensownymi tego języka. Według dyrektyw syntaktycznych języka polskiego połączenie wyrazów „góry są pokryte lasami" jest dozwolone, natomiast nie posiada sensu połączenie „góry albo dobrze"; według dyrektyw syntaktycznych języka symbolicznego arytmetyki dozwolone jest połączenie „2 + 7", natomiast nie mają sensu połączenia „2 — —", „2 — nie" itd. Nacisk położony na pra-

widłową budowę wyrażeń oraz na rozróżnienie wyrażeń sensownych i bez sensu jest, jak zobaczymy, jednym z najważniejszych czynników w rozwoju logiki współczesnej.

Słownik i składnia języków naturalnych są w stosunku do ich powstania i rozwoju późniejsze. Języki naturalne powstały i rozwijają się niezależnie od badań teoretycznych mających na celu zinwentaryzowanie ich wyrazów i sformułowanie dyrektyw syntaktycznych; słownik ich jest chwiejny, a dyrektywy syntaktyczne są tylko przybliżone. Sztuczne języki symboliczne nauk dedukcyjnych powstają drogą odwrotną, z góry ustala się słownik i dyrektywy syntaktyczne takiego języka, stosując się następnie do nich ściśle i bez wyjątku.

Mówiąc o sensie należy rozróżnić sens wyrażeń będących znakami i sens wyrazów będących jedynie częściami znaków. Sens wyrażeń będących znakami pozostaje w związku z ich rolą jako znaków. Wyrażenie „deszcz pada" staje się znakiem deszczu dla osób mówiących po polsku przez to, iż każdy, kto używa tego wyrażenia w sensie właściwym dlań w języku polskim, uznaje zdanie „deszcz pada" za prawdziwe w określonej sytuacji, tzn. wtedy i tylko wtedy, gdy deszcz pada; podobnie „czerwony" jest znakiem czerwonego przedmiotu przez to, iż każdy kto używa tego wyrazu w sensie właściwym dlań w języku polskim, uznaje za prawdziwe zdanie „to jest czerwone" wtedy i tylko wtedy, gdy wskazuje na czerwony przedmiot. Gdyby ktoś spostrzegając deszcz nie uznał za prawdziwe zdania „deszcz pada", to powiedzielibyśmy o nim, że wyrażenie to nie jest dlań znakiem deszczu, a zarazem, że nie przypisuje temu wyrażeniu sensu, jaki ono ma w języku polskim. Każdy, kto używa wyrażenia „deszcz pada" w sensie właściwym dlań w języku polskim, stosuje się jak gdyby do wymagania, aby uznawać za prawdziwe zdanie „deszcz pada" w razie spostrzeżenia deszczu. Wymaganie to formułuje się w postaci reguły: Każdy kto używa wyrażenia „deszcz pada" w sensie przysługującym mu w języku polskim, uznaje wyrażenie to za prawdziwe zawsze i tylko, jeżeli deszcz pada. Regułę tę nazywamy regułą lub dyrektywą sensu dla wyrażenia „deszcz pada" w języku polskim. W regule powyższej wyrażenia „„deszcz pada"" (w cudzysłowie, *in suppositione materiali*) i „deszcz pada" (bez cudzysłowu, *in suppositione simplici*) są różnymi wyrażeniami (por. niżej 123).

Rozważania powyższe dają się rozszerzyć także na wyrazy nie będące znakami, lecz jedynie częściami znaków. Wyrazy takie otrzymują sens w drodze niejako pośredniej, za pośrednictwem znaków, których są częściami. Reguła sensu dla pewnego wyrażenia jest zarazem regułą sensu dla wyrazów będących częściami tego wyrażenia. Np. dla wyrazów „starszy od" reguła sensu może mieć mniej więcej następujące brzmienie: Każdy, kto używa wyrazów „starszy od" w sensie przysługującym im w języku polskim, uznaje za prawdziwe wyrażenie „A jest starszy od B" zawsze i tylko, jeżeli A urodził się wcześniej niż B.

W różnych językach istnieją wyrażenia, dla których reguły sensu dają się tak sformułować, iż wymaga się uznania stosownego wyrażenia bez względu

na taką lub inną sytuację, w każdym niejako przypadku. Formułując taką regułę sensu, nie wymieniamy przeto warunku uznania odnośnego wyrażenia za prawdziwe, winno ono być uznane za prawdziwe wprost przez każdego, kto używa owego wyrażenia zgodnie z sensem przysługującym mu w danym języku. Przykładem niech będzie następująca reguła sensu dla wyrażenia „jest": Każdy, kto używa wyrazu „jest" w sensie, jaki posiada on w języku polskim, uznaje za prawdziwe zdanie „*a* jest *a*", jeżeli „*a*" oznacza jakikolwiek przedmiot. Tzw. najwyższe prawa myślenia logiki klasycznej (zasada identyczności, zasada sprzeczności), aksjomaty logiki matematycznej i matematyki mogą być formułowane w postaci tego rodzaju dyrektyw sensu dla występujących w owych aksjomatach wyrażeń.

Można wreszcie budować reguły sensu w ten sposób, iż uzależniamy w nich uznanie pewnych wyrażeń od uznania innych wyrażeń o poprzednio ustalonym sensie. Np. reguła sensu dla wyrazu „kwadrat" otrzyma w myśl powyższego brzmienie następujące: Każdy, kto używa wyrazu „kwadrat" w sensie, jaki wyraz ten posiada w języku polskim, uznaje za prawdziwe wyrażenie „powierzchnia ABCD jest kwadratem" zawsze i tylko, jeżeli uznaje za prawdziwe wyrażenie „powierzchnia ABCD jest prostokątem równobocznym na płaszczyźnie".

Stosownie do powyższych wyjaśnień dzielimy reguły sensu na trzy rodzaje: empiryczne, aksjomatyczne i dedukcyjne.

Empiryczne reguły sensu żądają uznania pewnych wyrażeń w zależności od empirycznie danej sytuacji; empirycznymi regułami sensu są, przytoczone wyżej jako przykłady, reguły sensu dla wyrażeń „deszcz pada", „czerwony", „starszy od".

Aksjomatyczne reguły sensu żądają uznania pewnych wyrażeń wprost, nie uzależniając tego uznania od żadnych warunków. Przykładem jest przytoczona wyżej reguła sensu dla wyrazu „jest".

Dedukcyjne reguły sensu żądają uznania pewnych wyrażeń w zależności od uznania innych wyrażeń. Należy tu przytoczony uprzednio przykład reguły sensu dla wyrazu „kwadrat". Podobnie np. sens wyrażenia „*p* i *q*", czyli koniunkcji zdań „*p*", „*q*", można ustalić za pomocą reguły: Każdy, kto posługuje się wyrażeniem „*p* i *q*" zgodnie z jego sensem w teorii zdań, uznaje za prawdziwe wyrażenie „*p* i *q*" zawsze i tylko, jeżeli uznaje za prawdziwe każde ze zdań „*p*" i „*q*" z osobna.

Języki symboliczne, którymi posługują się różne działy matematyki i logiki, opierają się na aksjomatycznych i dedukcyjnych regułach sensu z wyłączeniem reguł empirycznych. Język potoczny oraz języki nauk empirycznych wymagają reguł sensu wszystkich trzech rodzajów.

Słownik, dyrektywy syntaktyczne i dyrektywy sensu są niezbędne, a zarazem wystarczają do scharakteryzowania jakiegokolwiek języka.

2. Kategorie semantyczne

Klasyfikację wyrażeń pewnego języka, obejmującą zarówno wyrażenia proste jego słownika, jak też ich połączenia czyniące zadość dyrektywom syntaktycznym, uzyskujemy drogą następującą: Weźmy pod uwagę wyrażenie sensowne języka polskiego „prawdą jest, że Kraków leży nad Wisłą" i przekształcajmy je w ten sposób, iż wyrażenie będące jego częścią „Kraków leży nad Wisłą" zastępować będziemy kolejno przez inne wyrażenia. Kładąc tak po słowach „prawdą jest, że" np. wyrażenia „Kraków leży nad morzem", „$2 + 3 = 5$", otrzymujemy wyrażenia sensowne (prawdziwe lub fałszywe), natomiast wyrażenia „najwyższy szczyt Tatr", „i owszem", „$3 + 2$" itp. w tej samej sytuacji dają całość bezsensowną. Każde wyrażenie, które położone po słowach „prawdą jest, że" daje wraz z nimi całość sensowną, nazywa się **zdaniem** lub **powiedzeniem**. Termin „zdanie" użyty jest tu w sensie logicznym, zatem inaczej, niż używa się go w gramatyce; zdanie rozkazujące „nie oglądaj się", zdanie pytajne „czy dziś jest pogoda?", zdanie względne „który jest zielony" położone po słowach „prawdą jest, że" nie dają całości sensownej, nie są więc zdaniami według przyjętego wyżej sposobu użycia tego terminu, jakkolwiek są zdaniami w gramatyce.

Zdania „jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota" oraz „Kraków leży nad Wisłą" różnią się między innymi tym, że pierwsze z nich posiada część, która jest zdaniem („dziś jest piątek", „jutro jest sobota"), natomiast żadna część drugiego nie jest zdaniem. Zdanie, którego żadna część nie jest zdaniem, nazywamy **zdaniem prostym**; zdanie, które posiada część będącą zdaniem, jest **zdaniem złożonym**. Wyrażenie „prawdą jest, że Kraków leży nad Wisłą" jest zdaniem złożonym; jest zdaniem, ponieważ napisane po słowach „prawdą jest, że" daje wraz z nimi całość sensowną, jest zdaniem złożonym, ponieważ posiada część, która jest zdaniem. Zdanie to można przeto rozbić na część, która jest zdaniem (w zdaniu złożonym może być więcej takich części), i na część, która nie jest zdaniem ani też nie zawiera zdania jako części; część zdania złożonego, która nie jest zdaniem i nie zawiera zdania jako części, nosi nazwę **funktora zdaniotwórczego**, dokładniej tutaj: **funktora zdaniotwórczego argumentu zdaniowego**. W zdaniu „nie pójdę do lasu" „nie" jest funktorem zdaniotwórczym argumentu zdaniowego „pójdę do lasu"; w zdaniu „przyjdę, jeżeli zdążę" — „jeżeli" jest funktorem zdaniotwórczym dwóch argumentów zdaniowych „przyjdę" i „zdążę". Funktor zdaniotwórczy przekształca lub łączy zdania proste, występujące jako jego argumenty, na zdania złożone; jest przeto jak gdyby znakiem działania dokonywanego na argumentach.

Funktor tworzy wraz ze swymi argumentami zdanie złożone, sam jest natomiast wyrażeniem niezupełnym, podobnie jak symbole matematyczne „$=$", „$>$", „*log*" i in. Niezupełność funktora zaznaczamy pisząc na miejscu

jego argumentów symbole nieoznaczone „p, „q“, „r“, ... np. „nie p“, „p jeżeli q“. Symbole „p“, „q“, „r“, ... (małe litery alfabetu łacińskiego poczynając od „p“) wypisane na miejscu argumentów funktora zdaniotwórczego argumentów zdaniowych nazywamy **zmiennymi zdaniowymi**; reprezentują one dowolne zdania, które łącznie z funktorem dają wyrażenie sensowne, mianowicie zdanie złożone. Symbol złożony z funktora zdaniotwórczego i zmiennych zdaniowych występujących na miejscu jego argumentów nazywamy **funkcją zdaniową zmiennych zdaniowych**. Funkcja zdaniowa reprezentuje dowolne zdanie zbioru zdań, które powstają, gdy zamiast zmiennych położymy określone argumenty.

Wśród zdań prostych wyróżniają się zdania elementarne o faktach, zwane **zdaniami atomowymi**, jak zdania, które uznajemy na podstawie empirycznych dyrektyw sensu. Zdania atomowe mogę być zdefiniowane negatywnie jako zdania proste, nie zawierające terminów „wszystkie“ (lub „każde“) ani „pewne“ (lub „niektóre“). Zdaniami prostymi prócz zdań atomowych są zdania uzyskane przez generalizację funkcji propozycjonalnych, o których będzie mowa później (311), podobnie jak o zdaniach jednostkowych, nie będących atomowymi (424). Przykładami zdań atomowych niech będą zdania „to świeci“, „Warszawa jest większa od Poznania“, „tamto jest czerwone“. Natomiast nie jest atomowe zdanie „kwiat maku polnego jest czerwony“, ponieważ jest ono domyślnie poprzedzone słowem „każdy“, ani zdanie „róże bywają czerwone“, ponieważ jest ono skrótem zdania „niektóre róże są czerwone“, ani wreszcie zdanie „najwyższa góra świata leży w Himalajach“, ponieważ, jak okaże się (424), nie jest to zdanie proste.

Zastępując „to“ w przykładzie pierwszym przez inne wyrażenie języka polskiego, otrzymujemy bądź nowe zdanie atomowe, prawdziwe lub fałszywe, np. „słońce świeci“, bądź wyrażenie nie będące zdaniem atomowym, lecz albo zdaniem prostym nieatomowym, np. „diament świeci“, zamiast „każdy diament świeci“, albo zdaniem złożonym, np. „nieprawda, że coś tam świeci“, albo wyrażeniem bez sensu, np. „pójść świeci“. Wyrażenia „to“, „tamto“, „słońce“ i wszystkie inne, które zastępują „to“ w ten sposób, iż tworzą wraz z „świeci“ zdanie atomowe prawdziwe lub fałszywe, są **nazwami**. **Nazwy nazywają** przedmioty indywidualne (indywidua).

W zdaniu atomowym występuje bądź jedna nazwa, jak w poprzednim przykładzie, bądź dwie lub nawet więcej nazw, jak w przykładzie „Warszawa jest większa od Poznania“; w każdym jednak zdaniu atomowym występuje przynajmniej jedna nazwa, czasem tylko domyślnie, np. zdanie atomowe „grzmi“ jest równoznaczne zdaniu „to jest grzmotem“. W przykładzie „to jest czerwone“ występuje nazwa „to“ oraz wyraz „czerwone“, który nie jest nazwą; zastąpmy bowiem w zdaniu „to świeci“ nazwę „to“ przez „czerwone“, a otrzymamy wyrażenie „czerwone świeci“, nie będące zdaniem atomowym, ponieważ znaczy ono to samo, co „każdy przedmiot czerwony świeci“ lub

„pewien przedmiot czerwony świeci". Wyraz „czerwony" oraz wszystkie wyrażenia, które zastępują go w zdaniu atomowym „to jest czerwone" w ten sposób, iż powstaje znów zdanie atomowe, nazywamy orzecznikami (predykatami). Orzeczniki bywają nazywane nazwami ogólnymi lub generalnymi, w przeciwstawieniu do nich nazwami jednostkowymi lub indywidualnymi są wyrażenia, które określiliśmy wyżej jako nazwy bez żadnej przydawki.

Zastępujmy z kolei w zdaniu „to świeci" wyrażenie „świeci" przez inne wyrażenia języka polskiego, np. „pali", „grzeje", „jest czerwone", „i", „naprzód". Wyrażenie „świeci" oraz wszystkie i tylko te, które wraz z nazwą tworzą zdanie atomowe, są funktorami zdaniotwórczymi argumentu nazwowego. Funktor taki przekształca nazwę, przy której stoi, na zdanie atomowe, jest przeto jak gdyby znakiem dokonanego na niej działania. Tworząc z nazwą zdanie elementarne, jest on sam dla siebie wzięty wyrażeniem niezupełnym, podobnie jak funktor zdaniotwórczy argumentów zdaniowych. Niezupełność jego zaznaczamy przez symbole nieokreślone „x", „y", „z",..., które wpisujemy w miejsce jego argumentów, np. „x świeci" i analogicznie „x jest większe od y" itp. Symbole „x", „y", „z"... wpisane w miejsce argumentów nazwowych funktora zdaniotwórczego nazywamy zmiennymi nazwowymi. Całość złożona z funktora zdaniotwórczego i należących doń zmiennych nazwowych jest funkcją zdaniową argumentów nazwowych (lub krótko: funkcją propozycjonalną). W zdaniu „to jest czerwone" argumentami funktora „jest" są nazwa i orzecznik. „Jest" lub „są", które tworzy zdanie wraz z dwoma orzecznikami, np. „wieloryb jest ssakiem", „koty są drapieżcami", nazywamy (w tej roli owych wyrazów) funktorami zdaniotwórczymi dwóch argumentów orzecznikowych. „Każdy", „wszystkie", „niektóre" (np. „każdy wieloryb jest ssakiem") przed orzecznikiem w podmiocie zdania nie jest funktorem, który by przekształcał argumenty na funkcje owych argumentów; rola tych dodatków jest inna: łączą one desygnaty argumentów zdania, przed którymi stoją, w grupy, klasy, zbiory: zdanie „wieloryb jest ssakiem" jest zdaniem o tym lub tamtym wielorybie (lub według innej interpretacji o wielorybie abstrakcyjnym), natomiast zdanie „każdy wieloryb jest ssakiem" orzeka o zbiorze, klasie, zakresie wielorybów; podobnie zdanie „niektóre ssaki są drapieżcami" wydziela pewną grupę z zakresu ssaków. Omawiane wyrazy nazywamy kwantyfikatorami.

W myśl powyższych rozróżnień przeprowadzamy podział wyrażeń na kategorie semantyczne. Dwa wyrażenia, które mogą wzajemnie wymieniać się w pewnym wyrażeniu sensownym w ten sposób, iż po wymianie sens pozostaje zachowany, należą do tej samej kategorii semantycznej ze względu na owo wyrażenie.

W językach potocznych może być rzeczą wątpliwą, czy dwa wyrażenia, należące ze względu na pewne wyrażenie do jednej kategorii semantycznej

lub do różnych kategorii semantycznych, pozostają do siebie w tym samym stosunku także ze względu na wszystkie inne wyrażenia, w których mogą zawierać się stosownie do praw składni. Wątpliwość ma swe źródło w tym, że zarówno słownik, jak i dyrektywy syntaktyczne leżące u podstawy języków potocznych są chwiejne. Tak np. wyrażenie języka potocznego „prawda" jest wieloznaczne i w związku z tym trzeba rozdzielić zdania różnych kategorii semantycznych (por. 324). W sztucznych językach naukowych określa się kategorie semantyczne w ten sposób, iż nie są one odniesione do jakiegoś szczególnego wyrażenia. Dwa wyrażenia należące do jednej kategorii semantycznej ze względu na pewne wyrażenie należą do jednej kategorii semantycznej także ze względu na dowolne inne wyrażenie danego języka. Zmienną zaliczamy do tej samej kategorii semantycznej, do której należą reprezentowane przez nią wyrażenia.

Rozróżnienie kategorii semantycznych wskazuje sposób rozwiązania zagadnienia zwanego p a r a d o k s e m k l a s, związanego z używaniem wyrazów „zbiór" lub „klasa". Dyrektywa sensu dla wyrażenia „klasa *K*" nakazuje uznawać za prawdziwe zdanie „*x* należy do klasy *K*" („*K*" czytamy w dopełniaczu liczby mnogiej) zawsze i tylko, jeżeli prawdziwe jest zdanie „*x* jest *K*" („*K*" czytamy w narzędniku liczby pojedynczej), tak np. Adam należy do klasy ludzi, bo prawdziwe jest zdanie „Adam jest człowiekiem", podobnie 7 należy do klasy liczb całkowitych itd. Traktując wyrażenia postaci „klasa *K*" jako nazwy, skłonni jesteśmy uznać za prawdziwe zdania „klasa ludzi nie jest człowiekiem", czyli „klasa ludzi nie należy do siebie" (tj. do klasy ludzi) oraz „klasa klas jest klasą", czyli „klasa klas należy do siebie" (tj. do klasy klas). Paradoks powstaje, gdy zapytamy, czy klasa klas, które nie należą do siebie, należy do siebie. Jeżeli przypuścimy, że klasa klas, które nie należą do siebie, należy do siebie, to wynika stąd, że jest ona jedną z klas, które nie należą do siebie. Jeżeli zaś przypuścimy, że nie należy do siebie, to jest jedna z klas, które nie należą do siebie, a zatem według definicji musi do siebie należeć. Dochodzimy więc do sprzeczności, okazuje się bowiem, że klasa owa zarówno należy, jak nie należy do siebie.

Powstanie sprzeczności ma swe źródło w tym, iż popełnia się błąd, traktując wyrażenia postaci „klasa *K*" jako wyrażenia tej samej kategorii semantycznej co nazwy i uważając połączenie wyrazów „klasa ludzi nie jest człowiekiem" itp. za wyrażenie sensowne. Wyrażenie postaci „klasa *K*" należy do innej kategorii semantycznej niż nazwy i nie może być podstawione za zmienną nazwową w funkcji proporcjonalnej: *x* jest *K*, przez którą wyrażenie „klasa *K*" jest określone. Natomiast podobnie jak od kategorii semantycznej nazw przechodzi się za pośrednictwem funkcji: *x* jest *K* równoważnej z: *x* należy do klasy *K*, do odrębnej kategorii semantycznej wyrażeń postaci „klasa *K*", tak znów funkcja proporcjonalna *X* jest klasą, równoważna z: *X* należy do klasy klas, w której za zmienną *X* podstawiamy wyrażenia postaci „klasa *K*", prowadzi

do stworzenia nowej kategorii semantycznej, obejmującej wyrażenia takie, jak „klasa klas", czyli „klasa drugiego rzędu"; jest widoczne, że w ten sposób, tworząc klasy coraz wyższych rzędów, można mnożyć dowolnie liczbę kategorii semantycznych.

Celem usunięcia sprzeczności zawartej w paradoksie klas i innych podobnych Russell utworzył teorię typów logicznych, która rozróżnia przedmioty różnych typów. Oznaczone przez nazwy indywidua są przedmiotami typu najniższego, klasy indywiduów są przedmiotami typu wyższego w stosunku do indywiduów, klasy klas są przedmiotami typu wyższego w stosunku do klas indywiduów itp. Otrzymuje się hierarchię typów zbudowaną w ten sposób, iż każda klasa posiada typ wyższy od typu wszystkich należących do niej elementów. Odpowiednio klasyfikuje się także wyrażenia dotyczące przedmiotów różnych typów, oddzielając wyrażenia o indywiduach od wyrażeń o klasach indywiduów itd. Teoria typów oddziela przeto zdania o przedmiotach różnych typów od siebie, nie pozwalając na zastępowanie w zdaniach o indywiduach nazw indywiduów przez wyrażenia o klasach tych indywiduów i na rozszerzanie w ten sposób zdań o indywiduach na przedmioty wyższego typu.

Teoria typów logicznych usuwa paradoksy metodą analogiczną do tej, jaką stosuje się, wprowadzając rozróżnienie kategorii semantycznych, to jest przez ograniczenie zakresu wartości, które można podstawiać za zmienne w funkcjach propozycjonalnych. Będąc teorią *ad hoc* utworzoną i nie wiążąc się ponadto z niczym innym, staje się ona zbędna wobec tego, że rozróżnienie kategorii semantycznych i stopni języka (o czym będzie mowa w dalszym ciągu) nie tylko usuwa paradoksy, lecz zarazem uzasadnia ograniczenie zakresu wartości zmiennych niezbędne w tym celu wskazując, że jest ono szczególnym przypadkiem zastosowania istotnych właściwości języka. W dalszym ciągu wyrażenie „przedmiot pewnego typu" będzie używane jedynie jako skrót zamiast „przedmiot oznaczony przez wyrażenie pewnej kategorii semantycznej", podobnie: „dwa przedmioty należą do różnych typów" zamiast „dwa przedmioty są oznaczone przez wyrażenia należące do różnych kategorii semantycznych" itd.

3. Stopień języka

Język jest systemem znaków, którym odpowiadają przedmioty owymi znakami oznaczone. Np. język symboliczny arytmetyki jest systemem znaków oznaczających liczby i związki między nimi; językom potocznym odpowiadają w podobny sposób przedmioty świata empirycznego itd. Nazwijmy języki rozpatrywane z tego punktu widzenia językami pierwszego stopnia. Zbiór wyrażeń jakiegoś języka pierwszego stopnia można z kolei rozpatrywać jako zbiór przedmiotów oznaczonych przez wyrażenia należące do systemu innego języka. Ten nowy język nazwiemy językiem drugiego stopnia

w stosunku do tamtego języka pierwszego stopnia. Języki drugiego stopnia służą zatem do badania i opisywania języków pierwszego stopnia, tak jak języki pierwszego stopnia służą do badania i opisywania przedmiotów nie będących wyrażeniami języka. Chcąc zaś badać i opisywać języki drugiego stopnia musielibyśmy utworzyć języki trzeciego stopnia itd.

Języki potoczne nie są z powyższego punktu widzenia jednolite, zawierają bowiem wyrażenia należące do języków różnego stopnia. Jeżeli jakieś wyrażenie należy do języka pierwszego stopnia, to nazwa tego wyrażenia należy do języka stopnia drugiego; języki zaś potoczne posługują się swymi wyrażeniami nie tylko w roli im właściwej w danym języku pierwszego stopnia, ale także w roli nazw dla nich samych. Te dwa sposoby użycia wyrażeń rozróżnia logika klasyczna jako użycie wyrażenia w supozycji zwykłej *(suppositio simplex)* i w supozycji materialnej *(suppositio materialis)*. Wyrażenie pewnego języka potocznego wzięte w supozycji zwykłej posiada właściwy sobie sens w danym języku; użyte natomiast w supozycji materialnej, sens ten traci. Wyraz „zwierzę" użyty w supozycji zwykłej jest nazwą zwierzęcia i należy do języka pierwszego stopnia, wyraz ten użyty w supozycji materialnej należy do języka drugiego stopnia. Wyrażenia użyte w supozycji materialnej piszemy w cudzysłowach, dlatego bywają one określane jako n a z w y c u d z y s ł o w o w e, jak wyraz „zwierzę" na pierwszym miejscu w podanym wyżej przykładzie, ten sam wyraz na drugim miejscu został użyty w supozycji zwykłej. Taki sposób użycia cudzysłowów jest uogólnieniem sposobu stosowanego w językach potocznych, gdzie wprowadzamy je przy cytowaniu słów cudzych; oznaczamy wówczas nimi nie rzeczy, lecz owe cudze wypowiedzi.

Wyrażenia pewnego języka, zawierające wyrazy zaczerpnięte ze słownika nie tego języka, lecz języka innego stopnia, są z punktu widzenia logiki bez sensu. Okazuje się to dowodnie w fakcie, że charakterystyczne dla języków potocznych zatarcie różnicy między wyrażeniami różnych stopni językowych jest źródłem antynomii logicznych podobnych do paradoksu klas, w których pozornie poprawne założenia i rozumowania prowadzą do sprzeczności. Najczęściej przytaczany spomiędzy nich jest p a r a d o k s E p i m e n i d e s a, czyli a n t y n o m i a k ł a m c y, przypisywany Eubulidesowi, uczniowi Euklidesa, założyciela szkoły filozoficznej megarejskiej z IV w. przed Chr.: Epimenides Kreteńczyk (Kreteńczyków wyśmiewano jako kłamców) mówi „kłamię". Jeżeli mówiąc tak, mówi prawdę, czyli nie kłamie, to prawdą jest, że kłamie — jeżeli przeto nie kłamie, to kłamie. A jeżeli kłamie, to mówi nieprawdę; nieprawdą jest, że kłamie, więc nie kłamie — jeżeli przeto kłamie, to nie kłamie. W obu przypadkach kłamie i nie kłamie zarazem.

Wyrażenie „kłamię" jest wyrażeniem z języka drugiego stopnia, w którym stwierdza się nieprawdziwość jakiegoś wyrażenia należącego do języka pierwszego stopnia. W paradoksie Epimenidesa wyrażenie „kłamię" ma stwierdzić nieprawdziwość siebie samego, jest więc wzięte jednocześnie jako nieprawdziwe

wyrażenie z języka pierwszego stopnia (wyrażenie, którego nieprawdziwość zostaje stwierdzona) i prawdziwe wyrażenie z języka stopnia drugiego (które ową nieprawdziwość prawdziwie stwierdza). To właśnie pomieszanie rodzi antynomię.

Jako inny przykład bywa przytaczany paradoks orzeczników (nazw) heterosemantycznych. Dzieli się orzeczniki języka potocznego na autosemantyczne i heterosemantyczne. Autosemantyczny jest orzecznik, który orzeka się prawdziwie o nim samym, np. wyraz „rzeczownik" jest rzeczownikiem, wyraz „polski" jest wyrazem polskim. Natomiast orzeczniki heterosemantyczne nie posiadają tej własności, np. nie jest prawdą, że wyraz „niezłożony" jest nie złożony. Paradoks polega na stwierdzeniu, że wyraz „heterosemantyczny" jest zarazem autosemantyczny i heterosemantyczny. Albowiem jeżeli założymy, że jest autosemantyczny, to w myśl definicji orzeka się prawdziwie o sobie samym, czyli jest heterosemantyczny. Jeżeli zaś przypuści się, że jest heterosemantyczny, to w myśl definicji nieprawdą jest, że wyraz „heterosemantyczny" jest heterosemantyczny, czyli jest autosemantyczny.

Powyższy wywód wykracza przeciwko postulatowi rozróżnienia języków różnych stopni podobnie, jak antymonia kłamcy. Wyraz „heterosemantyczny" należy do języka drugiego stopnia i jest w tym języku nazwą wyrażeń o pewnej własności z języka pierwszego stopnia. Natomiast w przytoczonej antynomii wyraz ten ma być nazwą dla samego siebie. Jest więc użyty jako oznaczony przez tę nazwę i posiadający własność heterosemantyczności wyraz z języka drugiego stopnia, a jednocześnie jako autosemantyczny, bo nazywający sam siebie, wyraz z języka trzeciego stopnia.

Rozróżnienie języków pierwszego i drugiego stopnia pozwala na rozdzielenie rozważań dotyczących przedmiotów pewnego badania naukowego oraz rozważań dotyczących języka, w których tamte badania są formułowane. Jest to szczególnie ważne dla logiki i innych nauk posługujących się sztucznymi językami symbolicznymi. Utworzenie języka symbolicznego, jakkolwiek historycznie dzieje się w obrębie jednolitego procesu rozwojowego danej nauki, jest teoretycznie sprawą odrębną i należyte oddzielenie twierdzeń pewnej nauki, które dotyczą przedmiotów jej badania, od twierdzeń dotyczących języka jej nauki jest rzeczą wielkiego znaczenia z punktu widzenia metodologicznego, dopiero bowiem po dokonaniu takiego rozdzielenia potrafimy osiągnąć całkowitą ścisłość w budowaniu nauki, czego wyrazem jest jej sformalizowanie (231). Takie oddzielenie zostało dokonane dla logiki w ostatnim lat dziesiątku, dając w wyniku rozróżnienie logiki oraz metalogiki, czyli nauki o języku logiki. W szczególności należą do metalogiki ustalenia dotyczące słownika symboli logicznych, dyrektyw syntaktycznych oraz dyrektyw sensu, stanowiących zarazem dyrektywy uznawania twierdzeń logicznych.

Część 2

Teoria zdań

Rozdział 1. Podstawy metalogiczne

1. Funkcje prawdziwościowe

Podstawową częścią logiki jest ta, która zajmuje się związkami międzyzdaniowymi. Jest to teoria zdań lub teoria dedukcji, tak nazwana dlatego, iż wszelkie wnioskowanie *(deductio)* dzieje się według związków w niej rozpatrywanych. Związki międzyzdaniowe powstają przez łączenie zdań za pomocą funktorów zdaniotwórczych argumentów zdaniowych, których przykłady poznaliśmy już poprzednio (122). Rezultatem połączenia jest zdanie złożone. Nie każde jednak zdanie pozornie złożone w języku potocznym jest związkiem międzyzdaniowym; charakterystyczne bowiem dla języka potocznego nierozróżnianie stopni językowych sprawia, że nie odróżniamy zdań od ich nazw cudzysłowowych i uważamy mylnie nazwy cudzysłowe zdań, występujące jako części innych zdań, za zdania. Np. w zdaniu (1) „Jan sądzi, że dziś jest sobota" wyrażenie „dziś jest sobota" nie jest zdaniem, lecz nazwą cudzysłowową zdania. Nie stwierdza się tu bowiem, który mamy dzień tygodnia, lecz tylko, jaką jest myśl Jana, a zdanie „dziś jest sobota" jest wyrazem tej myśli. Zdanie (1) w dokładnym sformułowaniu brzmieć przeto powinno: Jan żywi przekonanie, którego wyrazem jest zdanie „dziś jest sobota". Tak sformułowane zdanie nie jest zdaniem złożonym. Innym typem zdania w języku potocznym pozornie złożonego, które nie jest związkiem międzyzdaniowym, jest zdanie (2) „niewątpliwie, że *p*" (albo „zdaje się, że *p*", „możliwe, że *p*" itp.). Zdania tego typu są zdaniami nie o fakcie, którego dotyczy zdanie *p*, lecz o samym tym zdaniu i znaczą tyle, co „zdanie *p* jest niewątpliwe" (lub: dostatecznie uzasadnione, możliwe itp.). Nie należy też do teorii zdań zdanie postaci (3) „*p* przeto *q*". Wyraz „przeto" wskazuje działanie odrywania (212), które zostało wykonane, aby uznać zdanie *q*, gdy zostało uznane zdanie *p*. Zdania dotyczące dokonywania działań logicznych na zdaniach są zdaniami o zdaniach logiki i należą do języka wyższego stopnia, także zatem zdanie „*p* przeto *q*" jest zdaniem, w którym *p* i *q* występują nie jako zdania będące częściami zdania złożonego, lecz jako nazwy cudzysłowowe zdań, na których zostało dokonane

działanie, wskazane przez wyraz „przeto". Powyższe zdanie jest wyrażeniem metalogicznym i znaczy to samo, co „zdanie *p* implikuje zdanie *q* i oba są prawdziwe."

W teorii zdań operujemy nie określonymi indywidualnie zdaniami, lecz funkcjami zdaniowymi zmiennych zdaniowych, dążymy bowiem do uzyskania wyników ogólnych, ważnych dla związków między jakimikolwiek zdaniami, bez względu na treść tych zdań. Charakteryzujemy funkcje zdaniowe występujące w teorii zdań przez wartość logiczną, jaką przybiera funkcja dla określonych wartości logicznych argumentów. Wartościami logicznymi są prawda (czyli zdanie prawdziwe lub zdanie, które uznajemy) i fałsz (czyli zdanie fałszywe lub zdanie, które odrzucamy). Logika rozróżniająca te dwie wartości nazywa się logiką dwuwartościową. Funkcje zdaniowe logiki zdań są jednoznacznie zależne od swoich argumentów, tzn. dla określonej wartości logicznej argumentów istnieje jedna i tylko jedna wartość logiczna funkcji zdaniowej. Funkcja zdaniowa zmiennych zdaniowych, której wartość logiczna zależy jedynie od wartości logicznej argumentów, nie zależy zaś od ich treści, nazywa się funkcją prawdziwościową. Wszystkie funkcje zdaniowe logiki zdań są funkcjami prawdziwościowymi.

Najprostszymi funkcjami prawdziwościowymi są funkcje, w których występuje jeden tylko argument *p*. Są to funkcja *p* zwana asercją i funkcja nie-*p* zwana negacją. Wartość logiczna asercji jest identyczna z wartością logiczną argumentu, wartość logiczna negacji jest przeciwna wartości logicznej argumentu. Przykładami funkcji prawdziwościowych dwóch argumentów w sformułowaniu słownym języka potocznego są „*p* i *q*", „*p* lub *q*", „*p* albo *q*", „jeżeli *p*, to *q*" (lub: „*q* jeżeli *p*"). Z funkcji prawdziwościowych dwóch argumentów można skonstruować funkcje prawdziwościowe większej liczby argumentów, jak np. „*p* lub *q* i *r*", „jeżeli *p* to *q* i *r*" itp.

Sposób używania przytoczonych wyżej połączeń jest w języku potocznym niekiedy chwiejny. Funkcje prawdziwościowe teorii zdań muszą być określone ściśle, przeto jakkolwiek zgodne są na ogół co do swych własności z połączeniami zdań w mowie potocznej, to jednak zgodność nie jest całkowita. W szczególności wymaga objaśnienia sposób, w jaki używa się w logice połączenia „jeżeli *p* to *q*", a mianowicie: 1) używa się go tu nie tylko w przypadkach, które gramatyka nazywa okresem warunkowym rzeczywistym, lecz także na oznaczenie okresu warunkowego możliwego i okresu warunkowego nierzeczywistego, tj. w przypadkach, w których mowa potoczna używa połączenia przez „jeżeliby" lub „gdyby" dla zaznaczenia, że warunek wymieniony w poprzedniku nie jest spełniony — innymi słowy „jeżeli *p*, to *q*" obejmuje w rozumieniu teorii zdań zarówno przypadki, w których *p* jest prawdziwe, jak i przypadki, w których *p* nie jest prawdziwe; 2) gdy używamy w mowie potocznej okresu warunkowego, to zazwyczaj mamy na myśli związek treściowy, według którego znając poprzed-

nik poznajemy również następnik, np. „jeżeli każde *S* jest *P*, to pewne *S* jest *P*", „jeżeli dziś jest środa, to jutro jest czwartek" itp. W niektórych jednak zwrotach języka potocznego łączymy ze sobą w okres warunkowy nawet zdania nie związane treściowo, aby podkreślić jedynie ich niewątpliwą prawdziwość lub fałszywość. Np. zdanie „jeżeli dwa razy dwa jest cztery, to wygramy w tym sporze" może służyć za zapewnienie o prawdziwości następnika: tak samo niemożliwa jest przegrana, jak niemożliwe, by dwa razy dwa nie było cztery, prawdziwość poprzednika gwarantuje tu niejako prawdziwość następnika, chociaż poza tym nic innego nie łączy obu zdań ze sobą. Podobnie zdanie „jeżeli ci się uda, to chyba mi włosy na dłoni wyrosną" jest zapewnieniem o niemożliwości udania się zamiaru; jak niemożliwe jest, by włosy na dłoni wyrosły, tak niemożliwe jest spełnienie zamiaru; fałszywość następnika gwarantuje fałszywość poprzednika, niepotrzebny jest w tym celu związek treściowy między zdaniami, natomiast ważna jest tylko prawdziwość obu zdań w pierwszym oraz fałszywość ich w drugim przykładzie. Połączenie „jeżeli *p*, to *q*" rozumiemy w teorii zdań tak, iż obejmuje ono także przykłady tego rodzaju; nie zwracamy przeto uwagi na związek treściowy zdań, lecz jedynie na to, by przy prawdziwym poprzedniku wykluczony był fałszywy następnik, a przy fałszywym następniku — prawdziwy poprzednik.

Jako przykład funkcji zdaniowych argumentów zdaniowych, które nie są funkcjami prawdziwościowymi, przytacza się wyrażenia postaci (1), (2), (3), jakie rozpatrywaliśmy poprzednio, dochodząc do wyniku, że nie są to funkcje argumentów zdaniowych, gdyż występujące w nich jako argumenty rzekome zdania są nazwami cudzysłowowymi zdań. Nie są również funkcjami prawdziwościowymi zdania języka potocznego, złożone przy pomocy spójników „chociaż", „bo (bowiem)", „ponieważ", „aby", lecz dają się one sprowadzić do funkcji prawdziwościowych z domyślnymi dodatkami treściowymi: 1) „*p* chociaż *q*" jest skrótem zdania złożonego „*q* i *p* i jeżeli *q*, to wątpliwe, że *p*"; 2) „*p* bo *q*" znaczy „*q* i jeżeli *q* to, *p*, przeto *p*"; 3) „*p* ponieważ *q*", to tyle, co „*p* i *q* i to, że *q*, jest przyczyną, że *p*"; 4) „*p* aby *q*" znaczy „niech *q* i *p*, bo jeżeli *p*, to *q*". Wydaje się uzasadnione przypuszczenie, że każde zdanie złożone języka potocznego potrafimy, analizując jego logiczną strukturę, pojąć albo jako przypadek którejś spomiędzy funkcji prawdziwościowych albo jako złożone jedynie pozornie.

2. Język teorii zdań

S ł o w n i k t e o r i i zdań składa się z dwóch rodzajów wyrazów: funktorów zdaniotwórczych argumentów zdaniowych, czyli s t a ł y c h l o g i c z n y c h „*C*", „*N*", „*A*", „*K*", „*D*", „*E*" — oraz zmiennych zdaniowych „*p*", „*q*", „*r*", „*s*", „*t*".....

Reguły składni. Następujące wyrażenia posiadają sens w teorii zdań:

a) Zmienne zdaniowe.

b) „*N*" z następującym po nim wyrażeniem sensownym.

c) „*C*" lub „*A*" lub „*K*" lub „*D*" lub „*E*" z następującymi po nim dwoma wyrażeniami sensownymi.

Wyrażenia sensowne logiki zdań reprezentują zdania, a w szczególności:

„*Np*" czytamy „nie *p*" i nazywamy negacją.

„*Cpq*" czytamy „jeżeli *p*, to *q*" i nazywamy implikacją.

„*Apq*" czytamy „*p* lub *q*" i nazywamy alternatywą.

„*Kpq*" czytamy „*p* i *q*" i nazywamy koniunkcją.

„*Dpq*" czytamy „*p* albo *q*" i nazywamy dysjunkcją.

„*Epq*" czytamy „zawsze i tylko, jeżeli *p*, to *q*" i nazywamy ekwiwalencją lub równoważnością.

Wymienionych sześć funkcji prawdziwościowych nie wyczerpuje wszystkich ich rodzajów, których jest dla dwóch argumentów szesnaście (por. 241). To, że właśnie one są oznaczone osobnymi symbolami, a nie pozostałe, jest spowodowane okolicznością, że są one związane najbliżej ze zdaniami złożonymi języka potocznego i że w historii badań logicznych one przede wszystkim zwróciły na siebie uwagę.

Reguły sensu. Historyczny rozwój logiki w największym skrócie przebiega tak mniej więcej, iż pewne twierdzenia logiczne, sformułowane w języku potocznym i pojmowane zgodnie z potocznym sposobem rozumienia wyrazów (np. zasada sprzeczności, zasada podwójnego przeczenia, zasady opozycji zdań i sylogizmu), zostały uznane dzięki swej oczywistości za aksjomaty logiczne, wyraźnie sformułowane lub domyślne, a na ich podstawie, według równie oczywistych sposobów rozumowania, były dowodzone inne twierdzenia logiki (np. prawa przekształcania sylogizmów). Zbudowany w ten sposób system logiki klasycznej stał się z kolei rzeczy przedmiotem analizy mającej na celu skontrolowanie jego wewnętrznej budowy, wykrycie założeń domyślnych, uzupełnienie luk wśród wywodów i twierdzeń, a zarazem uproszczenie i uporządkowanie całości w jednolity system. W miejsce oczywistości jako kryterium dla przyjęcia twierdzeń podstawowych wprowadzono kryteria inne, mniej zawodne, ścisłe. Zarazem zdano sobie sprawę z tego, że twierdzenia oczywiste nie mają jakiegoś bezwzględnego pierwszeństwa przed innymi, że nieuzasadnione jest przypuszczenie, jakoby były one jakimiś prawdami logicznie koniecznymi, wobec których założenia pozbawione oczywistości nie mają wartości logicznej. Poznano, że zależność między aksjomatami i innymi twierdzeniami jest dwustronna: przyjęcie jakiegoś twierdzenia jest uwarunkowane przez aksjomaty, które je uzasadniają, lecz i odwrotnie, przyjęcie takich lub innych aksjomatów zależy od tego, jakie mają być uzyskane z nich twierdzenia. Podobnie jak geometrie nieeuklidesowe, oprócz geometrii Euklidesa, okazały się możliwe logiki inne, prócz logiki klasycznej. Dawne, wyjątkowe stanowisko aksjomatów lo-

gicznych uległo nadto pod drugim jeszcze względem modyfikacji. Okazało się, że stosunek między aksjomatami i pozostałymi twierdzeniami można odwrócić, że aksjomaty mogą być dowodzone, jeżeli przyjmiemy jako założenia pewne inne twierdzenia logiki. Co więcej, okazało się, że pewne inne twierdzenia nadają się nawet lepiej od dawnych oczywistych aksjomatów dla udowodnienia całokształtu twierdzeń logicznych, że wystarcza ich mniej w tym celu, a logika staje się bogatsza, bardziej zwarta, jednocześnie zaś bardziej przejrzysta.

Zmieniło się więc zasadniczo znaczenie aksjomatów w logice (i nie tylko w logice, lecz to samo dotyczy wszelkich w ogóle nauk dedukcyjnych), a nadto uległ całkowitej zmianie pogląd na drugi składnik podstawowy tychże nauk, mianowicie na tzw. pojęcia pierwotne. Panował w poglądach na budowę nauk dedukcyjnych wraz z logiką pewnego rodzaju dualizm. Rozróżniano w nich dwojakiego rodzaju elementy pierwotne: pierwotne pojęcia, tj. zastany — potoczny — sens wyrazów występujących w aksjomatach, i pierwotne twierdzenia, czyli aksjomaty. Jak twierdzenia pochodne uzyskiwało się przez rozumowanie z aksjomatów, tak z pojęć pierwotnych przez definicje powstawały pojęcia pochodne, zdefiniowane. Dualizm ten nie utrzymał się, prymat otrzymały twierdzenia. Sens twierdzeń decyduje o sensie występujących w nich wyrażeń, a definicje przestały być elementem nauki, której wyrażeń dotyczą, zostały przeniesione niejako poza jej margines, jako wyrażenia należące do języka wyższego stopnia. Dyrektywy sensu nakazują uznawanie pewnych zdań za prawdziwe, sens zaś zawartych w owych zdaniach wyrazów zostaje dzięki temu ustalony tak, aby właśnie owe zdania były prawdziwe. Składniki zdania otrzymują sens przez uznanie jego prawdziwości w sposób analogiczny, jak niewiadoma x w równaniu $2x = 4$ zostaje określona przez to, iż wymagamy, aby sprawdziła ona to równanie.

W teorii zdań występują dyrektywy sensu aksjomatyczne i dedukcyjne; pierwsze dotyczą uznawania aksjomatów, drugie — uznawania twierdzeń pochodnych (teorematów) systemu logiki zdań. W aksjomatach występują niektóre tylko spośród wyrazów stałych i tylko te otrzymują sens przez aksjomaty; nazywamy je wyrazami pierwotnymi teorii zdań. Pozostałe spomiędzy wyrazów stałych otrzymują sens w zależności od wyrazów pierwotnych w ten sposób, iż dyrektywy zastępowania (definicyjne), stanowiące odmianę dyrektyw dedukcyjnych, pozwalają na wprowadzanie ich w teorematy jako skróty w miejsce wyrażeń złożonych z wyrazów pierwotnych i zmiennych; przez owe teorematy otrzymują one swój sens, podobnie jak wyrazy pierwotne otrzymują sens przez aksjomaty.

Aby należycie zrozumieć, co kieruje nami przy wyborze i formułowaniu dyrektyw sensu, należy pamiętać, że mamy przy tym na oku nie heurezę (tzn. odkrywanie nowych twierdzeń), lecz systematykę. Dyrektywy sensu dobierane są tak, aby nam pomogły przy analizie i porządkowaniu zastanych, na takich

lub innych intuicjach opartych, terminów i twierdzeń; abyśmy wydobyli wszystko, co w owych intuicjach było niedostatecznie uprzytomnione. Owe niedostatecznie uprzytomnione elementy można rozmaicie rozwinąć wysuwając jedno lub drugie na plan pierwszy. Można dobrać aksjomaty a wraz z nimi wyrazy pierwotne na rozmaite sposoby, zawsze jednak tak, aby wystarczały dla zbudowania jednej i tej samej teorii zdań jako całości. Dobór dyrektyw dedukcyjnych stosuje się do doboru dyrektyw aksjomatycznych.

Dyrektywy aksjomatyczne. Aksjomaty wprowadzone przez dyrektywy aksjomatyczne teorii zdań winny czynić zadość trzem wymaganiom, które stawia się wszelkim układom aksjomatów: 1) niesprzeczności, 2) niezależności, 3) zupełności.

Wymaganie niesprzeczności jest wymaganiem, by twierdzenia fałszywe pozostawały poza obrębem nauki. Odrzucenie go pociągnęłoby za sobą tę konsekwencję, iż wszystkie zdania fałszywe języka logiki musiałyby zostać uznane za twierdzenia logiczne, tak jak zdania prawdziwe. Z pary zdań sprzecznych wynika bowiem jakiekolwiek zdanie (por. tw. 222,5), przyjęcie przeto sprzecznych między sobą aksjomatów teorii zdań pozwoliłoby udowodnić każde zdanie jako twierdzenie tej teorii.

System aksjomatów spełnia warunek niezależności, jeżeli żaden z aksjomatów nie daje się udowodnić przy przyjęciu pozostałych aksjomatów i dyrektyw dedukcyjnych. Wymaganie niezależności aksjomatów ma zatem na celu, w myśl dawnej zasady *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*, uniknięcie tego, by przyjmować za aksjomaty zdania, które mogą być udowodnione; pokrywa się ono z żądaniem, by wszystko, co może być udowodnione, udowodnione zostało.

System aksjomatów winien być wreszcie zupełny. Wymaganie to jest spełnione, jeżeli każde zdanie prawdziwe w języku danej teorii wynika z jej aksjomatów, lub inaczej: jeżeli z dwóch zdań sprzecznych w języku danej teorii jedno wynika z jej aksjomatów, lub wreszcie: jeżeli każde zdanie sensowne w języku danej teorii bądź wynika z jej aksjomatów, bądź dołączone do nich daje sprzeczność. Dla podanych niżej układów aksjomatycznych teorii zdań istnieją dowody niesprzeczności, niezależności i zupełności. Natomiast dla wszelkich systemów aksjomatycznych, obejmujących pewne części arytmetyki (np. dodawanie i mnożenie) liczb naturalnych, istnieje ogólna metoda budowania takich zdań, które w obrębie danego systemu są nierozstrzygalne, żaden przeto taki system nie jest zupełny. Wspomniane twierdzenia stają się rozstrzygalne dopiero w teorii obszerniejszej.

Dołączenie do utworzonego we właściwy sposób układu aksjomatów pewnej nauki dedukcyjnej jakiegoś zdania zbudowanego z występujących w owych aksjomatach wyrazów sprawiłoby, że przestałby on czynić zadość wymaganiu niezależności (jeżeli dołączone zdanie byłoby prawdziwe) lub niesprzeczności

(jeżeli dołączone zdanie byłoby fałszywe); odłączenie natomiast któregoś z aksjomatów spowodowałoby, że ich układ przestałby być zupełny.

Niezależnie od powyższych wymagań, których zachowanie stanowi o poprawności systemu aksjomatów, dąży się do uproszczenia w dwóch jeszcze kierunkach. Aksjomaty nie obejmują wszystkich wyrazów słownika danej nauki, lecz jedynie wyrazy pierwotne. Niejednokrotnie przeto dobiera się aksjomaty w ten sposób, aby jak najmniej było wyrazów pierwotnych. Dąży się wreszcie do tego, by aksjomaty występowały w najmniejszej liczbie. W obu tych kierunkach osiągnięto w logice zdań granicę, budując jedyny aksjomat logiki zdań, zawierający jeden tylko wyraz pierwotny — chodzi jeszcze o to, aby ów aksjomat uczynić jak najkrótszym.

Przed wszystkimi tymi wymaganiami systematyki naukowej musi ustąpić wymaganie oczywistości aksjomatów, ważne w heurystyce. Na ogół przeto zdania, które ustala się jako aksjomaty teorii zdań, są mniej oczywiste od wielu innych, które za pomocą tamtych są dowodzone.

Najbardziej znane w chwili obecnej układy aksjomatów teorii zdań są następujące:

a) Układ implikacyjno-negacyjny, stworzony przez Fregego a wydoskonalony przez Łukasiewicza, w którym jako wyrazy pierwotne występują implikacja i negacja. Aksjomatami w tym układzie są tezy (numery przy tezach wskazują miejsca z rozdz. 2 *Wybrane tezy teorii zdań*, w których tezy te są objaśnione):

221,7 *CCpqCCqrCpr*
222,3 *CCNppp*
222,5 *CpCNpq*

Układ powyższy daje się zastąpić przez jedyny aksjomat:

222,20 *CCCpqCCCNrNstrCuCCrpCsp*

b) Układ alternatywno-negacyjny, stworzony przez Whiteheada i Russella, poprawiony przez Bernaysa. Wyrazami pierwotnymi są alternatywa i negacja, lecz aksjomaty otrzymują postać prostszą, jeżeli wprowadzi się w nie zamiast negacji implikację według definicji opartej o równoważność *ECpqANpq* (223,20 i 223,21). Aksjomatami w tak uzupełnionym systemie są tezy:

223,1 *CAppp*
223,2 *CpApq*
223,4 *CApqAqp*
223,13 *CCqrCApqApr*

Inną szczególnie przejrzystą postać alternatywno-negacyjnego układu aksjomatów podał Łukasiewicz; układ ten składa się z tez:

223,11 *CCApqrCpr*
223,12 *CCApqrCqr*
223,14 *CCprCCqrCApqr*

(negacja zastąpiona przez implikację, jak wyżej). Wszystkie trzy aksjomaty łącznie stwierdzają, że wyrażenie *CApqr* jest równoważne układowi zdań *Cpr* i *Cqr*.

c) Układ dysjunkcyjny, składający się z jedynego aksjomatu z dysjunkcją jako jedynym terminem pierwotnym, odkryty przez Nicoda a udoskonalony i uproszczony przez Łukasiewicza. Aksjomatem Nicoda—Łukasiewicza jest teza:

225,12 *DDpDqrDDpDrpDDsqDDpsDps*

Dyrektywy dedukcyjne. Według dyrektyw dedukcyjnych są uznawane w zależności od uznania pewnych zdań zdania inne. Są to przeto dyrektywy rozumowania, rozumowanie bowiem jest procesem, w którym — wychodząc od uznania pewnych zdań (przesłanek) — uznajemy inne zdania (wynik rozumowania, konkluzja). Dzielimy owe dyrektywy na dwa rodzaje według rodzaju zdań, których dotyczą. Dyrektywy pierwszego rodzaju — to dyrektywy, które prowadzą do uznawania zdań zbudowanych jedynie z wyrazów występujących w przesłankach. Dyrektywy drugiego rodzaju dotyczą uznawania zdań, które zawierają jakiś wyraz nie występujący w przesłankach. Zdania przeto uznawane na podstawie dyrektyw pierwszego rodzaju rozwijają sens wyrazów zawartych w przesłankach; zdania uznawane na podstawie dyrektyw drugiego rodzaju określają sens wyrazów nowowprowadzonych. Rozróżniamy nadto dedukcyjne dyrektywy pierwotne i dyrektywy wtórne; dyrektywy wtórne są dyrektywami rozumowań skróconych, w które wchodzą pewne twierdzenia logiczne jako zasady rozumowania i dyrektywy pierwotne. Dyrektywy pierwotne muszą być dostosowane do wyrazów pierwotnych występujących w aksjomatach. Różnym układom aksjomatów odpowiadają różne zespoły dyrektyw. Dla implikacyjno-negacyjnego układu aksjomatów, przy uwzględnieniu nadto czterech funktorów „*A*", „*K*", „*D*", „*E*" nie występujących w aksjomatach, przyjąć należy dwie dyrektywy pierwotne pierwszego rodzaju: podstawiania i odrywania, oraz cztery dyrektywy drugiego rodzaju zwane dyrektywami zastępowania.

Podstawianiem nazywa się czynność zamiany pewnej zmiennej, wszędzie gdzie ona w danym wyrażeniu występuje, na inne wyrażenie sensowne. W teorii zdań podstawiać można za zmienne zdaniowe *p*, *q*, *r*,... nie tylko a) inne zmienne zdaniowe, nie występujące w danym wyrażeniu (co by nie miało większej doniosłości), ale także b) zmienne, które występują w danym wyrażeniu gdzie indziej, oraz c) wyrażenia sensowne złożone ze stałych i ze zmiennych. Podstawianie wyrażenia *W* za zmienną *Z* będziemy oznaczać symbolem „*Z*/*W*". Np. a) podstawiając *p*/*r* w wyrażeniu *CNpp* (jeżeli nie *p*, to *p*), otrzymujemy *CNrr* (jeżeli nie *r*, to *r*), b) podstawiając *q*/*p* w wyrażeniu *Cpq* otrzymujemy *Cpp*, c) podstawiając w tym samym wyrażeniu *q*/*CNpq*, otrzymujemy *CpCNpq* (jeżeli *p*, to jeżeli nie *p*, to *q*, por. wyżej aksjomat 222,5).

Dyrektywa podstawiania nakazuje uznać każde zdanie uzyskane przez podstawienie ze zdania uznanego. Każde wyrażenie, które uzyskamy przez podstawienie z tezy teorii zdań, jest również jej tezą (tezami teorii zdań nazywamy jej aksjomaty i teorematy).

Rozróżnić należy podstawienia i interpretacje wyrażeń logiki. Interpretacja rożni się tym od podstawienia, iż zamieniamy zmienną nie na wyrażenie sensowne teorii zdań, lecz na określone zdanie jakiejś innej nauki (np. na zdanie matematyczne „2 + 3 = 5") lub na zdanie mowy potocznej (np. „dziś jest wtorek"). Interpretacje, podobnie jak podstawienia, dokonane na zdaniach prawdziwych dają zdania prawdziwe. Jednakowoż gdy przez podstawienie dokonane na tezie teorii zdań otrzymujemy znów tezę teorii zdań, to przez interpretację przechodzimy do zdania tej dziedziny, z której zaczerpnęliśmy zdanie zamieniające zmienną. Interpretacje służą przeto do uzyskania zastosowań twierdzeń logicznych w różnych dziedzinach wiedzy i życia potocznego.

Zarówno podstawienia w przypadkach b) i c), jak i interpretacje mogą być uważane za procesy, w których przechodzimy od twierdzenia ogólnego do jego szczegółowego przypadku. Są więc pod tym względem analogiczne do rozumowania według reguły zwanej *Dictum de omni* i głoszącej: *Quidquid de omnibus valet, valet etiam de quibusdam et de singulis. Dictum de omni* występuje w logice klasycznej jako zasada arystotelesowskiego sylogizmu kategorycznego *Barbara*, który rozumiano w ten sposób, iż w konkluzji sylogizmu widziano zastosowanie twierdzenia ogólnego występującego w przesłance większej do przypadków szczegółowych wymienionych w przesłance mniejszej.

Odrywaniem (domyślnie: następnika implikacji) nazywa się czynność przekształcania implikacji na dwa oddzielne zdania przez odrzucenie funktora „jeżeli to" łączącego jej poprzednik i następnik, przy czym warunkiem tego przekształcenia jest uznanie zarówno implikacji jako całości, jak i jej poprzednika. Funktor wiąże dwa zdania w całość implikacji, przez jego odrzucenie odrywamy niejako jedno od drugiego. Aby zaznaczyć, że wyrażenia p i q otrzymaliśmy przez oderwanie z implikacji: jeżeli p, to q, łączymy je przez „przeto", „więc": „p przeto (więc) q", lub „bo": „q bo p". Dyrektywa odrywania nakazuje uznać zdanie będące następnikiem implikacji, na której dokonano oderwania. Następnik implikacji, która jest tezą teorii zdań i której poprzednik jest tezą teorii zdań, staje się przez oderwanie również tezą teorii zdań.

Dyrektywa odrywania odpowiada stoickiemu sylogizmowi hipotetycznemu *modus ponens*, w którym z prawdziwości zdania warunkowego i jego poprzednika wnioskujemy, że prawdziwy jest jego następnik. Odrywanie nie jest procesem, w którym przechodzilibyśmy od twierdzenia ogólnego do podporządkowanego pod to twierdzenie przypadku szczegółowego. Mylne zatem jest zdanie tych, którzy nie zdając sobie sprawy z różnicy między sylogizmem arystotelesowskim i stoickim sądzą, że dedukcja jest zawsze rozumowaniem z ogółu o szczególe.

Zastępowaniem nazywa się czynność zamiany sensownej części wyrażenia na określone inne wyrażenie sensowne. Zastępowanie różni się od podstawiania w trzech punktach: 1. Podstawiać wolno jedynie za zmienne zdaniowe, zastępuje się natomiast części wyrażeń złożone z wyrazów stałych i zmiennych; 2. za zmienną wolno podstawić jakiekolwiek wyrażenie sensowne złożone ze stałych i ze zmiennych, zastąpić część wyrażenia wolno tylko przez wyrażenie wskazane w odnośnej dyrektywie; 3. przy podstawianiu jesteśmy obowiązani zamienić zmienną poddaną tej operacji na jej podstawienie wszędzie, gdzie ona występuje w danym wyrażeniu; przy zastępowaniu dokonujemy tej czynności na wyraźnie wskazanej części wyrażenia i choćby w nim była druga część takiej samej postaci, zastępowanie nie rozciąga się na nią (ale może być także do niej odrębnie zastosowane).

I dyrektywa zastępowania: Każde wyrażenie, które uzyskamy z tezy teorii zdań, jeżeli zastąpimy w niej „*CNpq*" przez „*Apq*", jest tezą teorii zdań.

Dla przykładu przekształćmy tezę 221,1 *Cpp*, podstawiając *p/CNpq*, co da jako rezultat *CCNpqCNpq*, a następnie zastąpmy „*CNpq*" na pierwszym od lewej miejscu przez „*Apq*". Otrzymamy tezę 223,18 *CApqCNpq* (jeżeli *p* lub *q*, to jeżeli nie *p* to *q*), którą stosujemy przy wnioskowaniu według sylogizmu alternatywnego *modo tollendo ponente*; przy interpretacji *p* jako „dziś jest piątek" i *q* jako „dziś jest sobota" zdanie ostatnie brzmi: „jeżeli dziś piątek lub sobota, to jeżeli dziś nie piątek, to dziś sobota".

II dyrektywa zastępowania: Każde wyrażenie, które uzyskamy z tezy teorii zdań, jeżeli zastąpimy w niej „*NCpNq*" przez „*Kpq*", jest tezą teorii zdań.

III dyrektywa zastępowania: Każde wyrażenie, które uzyskamy z tezy teorii zdań, jeżeli zastąpimy w niej „*CpNq*" przez „*Dpq*", jest tezą teorii zdań.

IV dyrektywa zastępowania: Każde wyrażenie, które uzyskamy z tezy teorii zdań, jeżeli zastąpimy w niej „*NCCpqNCqp*" przez „*Epq*", jest tezą teorii zdań.

Każda z dyrektyw zastępowania prowadzi do tez, przez które zostaje ustalony i rozwinięty sens jednej z czterech stałych logicznych nie występujących w aksjomatach. Wyrażenie *W*, które według dyrektywy zastępowania może zastąpić jakieś inne wyrażenie W_1 nazywamy równoznacznym z W_1. Wyrażenie stwierdzające równoznaczność wyrażenia *W* z wyrażeniem W_1 nazywamy definicją semantyczną (lub nominalną) wyrażenia *W* (*definiendum*) przez wyrażenie W_1 (*definiens*). Odpowiednio przeto do czterech dyrektyw zastępowania napiszemy cztery definicje (równoznaczność oznaczamy znakiem „=" umieszczonym między nazwami cudzysłowowymi *W* i W_1):

212-I „*Apq*" = „*CNpq*",

czyli: „*p* lub *q*" znaczy to samo, co „jeżeli nie *p*, to *q*".

212-II „*Kpq*" = „*NCpNq*",

czyli: „p i q“ znaczy to samo, co „nieprawda, że jeżeli p, to nieprawda że q“.

212-III „Dpq“ = „$CpNq$“,

czyli „p albo q“ znaczy to samo, co „jeżeli p, to nieprawda, że q“.

212-IV „Epq“ = „$NCCpqNCqp$“,

czyli: „zawsze i tylko jeżeli p, to q“ znaczy to samo, co „nieprawda, że jeżeli Cpq, to nieprawda, że Cqp“.

Powiedziane zostało, że tylko tezy logiki uzyskane według dyrektyw zastępowania ustalają w teorii zdań sens terminów, których owe dyrektywy dotyczą, nie zaś same dyrektywy ani definicje, albowiem ani dyrektywy, ani definicje nie należą do logiki, lecz są wyrażeniami metalogiki.

Równoznaczności, o których wyżej była mowa, należałoby oznaczyć dokładniej jako równoznaczności w języku systemu implikacyjno-negacyjnego, gdyż są one ustalone przez dyrektywy układu implikacyjno-negacyjnego aksjomatów, podobnie można mówić o równoznaczności wyrażeń w języku systemu alternatywno-negacyjnego i każdego innego. Wyrażeń równoznacznych w którymkolwiek z powyższych sposobów użycia tego terminu na ogół nie nazwalibyśmy może równoznacznymi w języku potocznym (lecz co najwyżej równoważnymi), jednakże dyrektywy zastępowania przestrzegają tej przynajmniej zasady, by wszelkie zdania, które uznajemy według dyrektyw zastępowania, mogły być uznane także według potocznego sposobu rozumienia odnośnych wyrażeń.

Dyrektywy zastępowania mogą być kombinowane z dyrektywą podstawiania w ten sposób, iż wolno stosować dyrektywy zastępowania nie tylko w brzmieniu, które wyżej zostało przytoczone, lecz także w brzmieniu, które one otrzymują, gdy wyrażenia sensowne w nich zawarte przekształcimy według dyrektywy podstawiania. Np. według I dyrektywy zastępowania uznajemy zdania, które uzyskamy z tez teorii zdań, zastępując nie tylko „$CNpq$“ przez „Apq“, lecz także „$CNqp$“ przez „Aqp“ itp.

Wśród dyrektyw pochodnych pierwszego rodzaju istnieje analogiczna do dyrektyw zastępowania dyrektywa nakazująca uznanie każdego zdania, które powstaje z tezy teorii zdań, jeżeli jej część stanowiąca wyrażenie sensowne zostanie zastąpiona przez wyrażenie z częścią tą równoważne. Ta d y r e k t y w a z a s t ę p o w a n i a w y r a ż e ń r ó w n o w a ż n y c h jest konsekwencją założenia, że wszystkie funkcje logiki zdań są funkcjami prawdziwościowymi. Albowiem z dwóch wyrażeń równoważnych jedno posiada zawsze (tj. dla wszelkich wartości występujących w nim zmiennych) tę samą wartość logiczną, co drugie dla tych samych wartości zmiennych; zastąpienie przeto jednego przez drugie nie wpływa na wartość wyrażenia, w którym go dokonano. Dyrektywa zastępowania wyrażeń równoważnych zasadniczo różni się od wszelkich dyrektyw zastępowania wyrażeń równoznacznych tym, iż sens obu wyrażeń równoważnych jest ustalony poprzednio, gdy tymczasem wyrażenie równoznaczne innemu według dyrektywy pierwotnej zastępowania nie posiada poprzednio ustalonego sensu. Zmieniając układ dyrektyw aksjomatycznych i pierwotnych

dyrektyw zastępowania (a wraz z nimi układ aksjomatów i definicyj) sprawimy, że pewne wyrazy, w poprzednim układzie pierwotne, stracą ten charakter w nowym układzie. W tym nowym układzie trzeba przeto wprowadzić dyrektywy zastępowania dla ustalenia sensu owych wyrazów, co dzieje się w ten sposób, iż odpowiednie związki równoważności z poprzedniego układu przekształcamy na związki równoznaczności. Tak np. występujące w układzie implikacyjno-negacyjnym twierdzenie (223,7—223,8) *ECpqANpq* służy w układzie alternatywno-negacyjnym do zbudowania definicji „*Cpq*" = „*ANpq*".

Rozdział 2. Wybrane tezy teorii zdań

1. Implikacja („*C*")

Rozdział niniejszy podaje wybrane tezy teorii zdań według układu implikacyjno-negacyjnego bez dowodów; ich porządek jest ustanowiony dowolnie z zachowaniem na ogół zasady, by postępować od tez prostszych do bardziej złożonych. Porządek logiczny wymagałby podania na czele aksjomatów, następnie zaś innych tez w kolejności, w której zostają udowodnione, tak by tezy będące przesłankami dla innych znalazły się przed nimi w owej kolejności.

Do poszczególnych tez dołącza się dla objaśnienia: a) nazwę tezy, jeżeli istnieje; b) brzmienie tezy w wyrazach języka potocznego, przy tezach dłuższych, dla których brzmienie to byłoby zbyt ciężkie, części ich są pozostawione w symbolach języka teorii zdań; c) jej opis w wyrazach metalogiki; d) przykład interpretacji; e) komentarz wskazujący analogie, zastosowanie, niektóre związki inferencyjne między tezami itp. Dla ścisłości należy zauważyć, że posługując się tymi samymi symbolami „*p*", „*q*" itd. w objaśnieniach b) i c) używamy ich dwuznacznie, w a) są to zmienne zdaniowe, w b) zmienne, które reprezentują nazwy zdań; analogiczna dwuznaczność obciąża symbole funktorów.

221,1 *Cpp*

a) prawo tożsamości lub identyczności (gdyż dotyczy zdań identycznych);
b) jeżeli *p*, to *p*;
c) *p* implikuje *p*, ponieważ zaś *p* reprezentuje jakiekolwiek zdanie, przeto teza ta stwierdza, że między każdym zdaniem a nim samym zachodzi implikacja;
d) jeżeli dziś jest niedziela, to dziś jest niedziela;
e) tezy teorii zdań są przeważnie implikacjami i z tego względu rolę implikacji w teorii zdań można przyrównać do roli równości w arytmetyce, której twierdzenia mają zazwyczaj formę równań — jakkolwiek implikacja nie jest związkiem symetrycznym, jak równość. Prawo tożsamości jest jakby logicznym odpowiednikiem twierdzenia arytmetyki, według którego każda wielkość jest sobie równa.

221,2 $CqCpq$

a) prawo symplifikacji;
b) jeżeli q, to jeżeli p, to q;
c) q implikuje, że p implikuje q;
d) jeżeli dziś jest niedziela, to — cokolwiek by było — dziś niedziela;
e) teza ta podaje warunek wystarczający, aby implikacja była prawdziwa: mianowicie przypuśćmy, że q jest prawdziwe, i zastosujmy dyrektywę odrywania, to otrzymamy jako konkluzję zdanie prawdziwe Cpq, jakimkolwiek byłoby zdanie p. Innymi słowy: jeżeli prawdziwy jest następnik implikacji q, to implikacja jest prawdziwa przy jakimkolwiek poprzedniku p. Teza ta bywa także nazywana charakterystyką zdania prawdziwego, albowiem można ją rozumieć jako stwierdzenie tej charakterystycznej dla zdania prawdziwego właściwości, iż jest ono implikowane przez każde zdanie, prawdziwe albo fałszywe.

221,3 $CCpqCpq$

a) prawo asercji lub prawo sylogizmu hipotetyczno-kategorycznego modus ponens;
b) jeżeli Cpq, to jeżeli p to q;
c) jeżeli p implikuje q, to jeżeli p jest prawdziwe, także q jest prawdziwe;
d) jeżeli x podzielne przez a jest podzielne przez b, to jeżeli x jest podzielne przez a, x jest podzielne przez b;
e) teza 221,3 przedstawia własność implikacji, z której czyni użytek dyrektywa odrywania, gdyż teza ta stwierdza prawdziwość zdania q, jeżeli jest ono w prawdziwej implikacji następnikiem prawdziwego poprzednika. Nazywa się ona prawem asercji, ponieważ podaje warunki pozwalające na uznanie, czyli asercję, zdania q. Otrzymujemy ją z tezy 221,1 przez podstawienia p/Cpq. Inną postać prawa asercji podaje teza następująca:

221,4 $CpCCpqq$,

która różni się od tezy 221,3 porządkiem poprzedników Cpq i p.

221,5 $CCCpqpp$

a) twierdzenie Peirce'a;
b) jeżeli: jeżeli Cpq, to p — to p;
c) jeżeli implikacja Cpq implikuje p, to p jest prawdziwe;
d) twierdzenie powyższe, w przeciwieństwie do poprzednich, nie jest oczywiste i trudno je zilustrować konkretnym przykładem. Jego sens stanie się jasny, gdy zważymy, że przy p prawdziwym także $CCpqp$ jest prawdziwe, jako implikacja o prawdziwym następniku p; natomiast przy p fałszywym Cpq jest prawdziwe, jako implikacja o fałszy-

wym poprzedniku, a zatem *CCpqp* jest fałszywe, bo jest implikacją, w której poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Wyrażenie *CCpqp* jest zatem równoważne z *p* i twierdzenie *CCCpqpp* wynika z tezy 221,1 *Cpp* w myśl dyrektywy zastępowania wyrażeń równoważnych, gdy zastąpimy *p* w poprzedniku implikacji przez *CCpqp*. Teza 221,5 występuje jako aksjomat w pewnej teorii funkcji propozycjonalnych z kwantyfikatorami (zob. niżej 321,4).

221,6 *CCpCqrCqCpr*

a) prawo kommutacji, czyli przemienności hipotez (hipoteza i teza w klasycznej terminologii logicznej poprzednik i następnik okresu warunkowego);
b) jeżeli *CpCqr*, to *CqCpr*;
c) jeżeli *p* implikuje, że *q* implikuje *r*, to *q* implikuje, że *p* implikuje *r*;
d) zdanie „jeżeli *x* jest podzielne przez *2*, to jeżeli jest nadto podzielne przez *3*, jest podzielne także przez *6*", implikuje „jeżeli *x* jest podzielne przez *3*, to jeżeli jest nadto podzielne przez *2*, jest podzielne także przez *6*";
e) prawo kommutacji pozwala na sformułowanie bardzo ważnej dyrektywy wtórnej rozumowania, mianowicie dyrektywy kommutacji, według której można przekształcać tezy teorii zdań, przenosząc w sposób wskazany przez prawo kommutacji poprzedniki implikacyj. Tak np. stosując dyrektywę kommutacji do tezy 221,3 przekształcamy ją na tezę 221,4.

221,7 *CCpqCCqrCpr*

a) prawo sylogizmu hipotetycznego;
b) jeżeli *Cpq* to, jeżeli *Cqr*, *Cpr*;
c) zdanie: *p* implikuje *q* — implikuje, że zdanie: *q* implikuje, *r* — implikuje zdanie: *p* implikuje *r*;
d) jeżeli (prawdą jest, że) jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota — to jeżeli (nadto prawdą jest, że) jeżeli jutro jest sobota, to jutro po południu banki są nieczynne — to (prawdą jest, że) jeżeli dziś jest piątek, to jutro po południu banki są nieczynne;
e) teza 221,7 występuje jako pierwszy z aksjomatów układu implikacyjno-negacyjnego. Dyrektywa kommutacji pozwala na nadanie tezie 221,7 postaci odmiennej, mianowicie:

221,8 *CCqrCCpqCpr*

Prawa sylogizmu hipotetycznego w obu postaciach 221,7 i 221,8 dają wtórną dyrektywę rozumowania o bardzo szerokim zastosowaniu; według tej dyrektywy sylogizmu wolno przekształcić *Cpq* na *Cpr*,

jeżeli *Cpq* jest tezą teorii zdań, albo też *Cqr* na *Cpr*, jeżeli *Cpq* jest tezą teorii zdań; mówiąc ogólnie dyrektywa sylogizmu pozwala w danych warunkach na zmianę poprzednika lub następnika implikacji, co jest zabiegiem często stosowanym przy dowodzeniu.

221,9 *CCCpqrCCrpCsp*

a) jedyny aksjomat implikacyjnej teorii zdań;

c) jeżeli *Cpq* implikuje *r*, to *Crp* implikuje *Csp*;

e) teza 221,9 znaleziona przez Łukasiewicza jest jednym, najkrótszym z dotychczas znanych, spomiędzy twierdzeń, które mogą być jedynym aksjomatem implikacyjnej teorii zdań, tzn. wystarcza ona dla uzyskania wszystkich tez teorii zdań, zbudowanych za pomocą jedynego funktora „*C*".
W tezę 221,9 są uwikłane tezy 221,2 *CqCpq*, 221,5 *CCCpqpp* i 221,7 *CCpqCCqrCpr*. Mianowicie z *CCpqr* i *Crp* wynika według 221,7 *CCpqp*, z tego wyrażenia według 221,5 wynika *p*, a wreszcie z *p* według 221,2 wynika *Csp*. Wspomniane zaś trzy tezy tworzą, jak wiadomo było już dawniej, układ zupełny aksjomatów implikacyjnej teorii zdań.

2. Negacja („*C*", „*N*")

222,1 *CpNNp*

a) prawo podwójnego przeczenia;

b) jeżeli *p*, to nieprawda, że nie *p*;

c) prawdziwość zdania *p* implikuje, że jego zaprzeczenie jest fałszywe;

d) jeżeli deszcz pada, to nieprawda, że deszcz nie pada.

222,2 *CNNpp*

a) odwrotne prawo podwójnego przeczenia,

b) jeżeli nieprawda, że nie *p*, to *p*;

c) jeżeli fałszywe zaprzeczenie zdania *p*, to *p* prawdziwe;

d) jeżeli nieprawda, że deszcz nie pada, to deszcz pada;

e) oba prawa podwójnego przeczenia są odwrotnymi względem siebie implikacjami; para odwrotnych implikacji daje równoważność między obu członami owych implikacji (por. 226,6). Oba prawa podwójnego przeczenia prowadzą przeto do wtórnej dyrektywy podwójnego przeczenia, będącej szczególnym przypadkiem dyrektywy zastępowania wyrażeń równoważnych; wspomniana dyrektywa nakazuje uznawać za tezy teorii zdań zdania, które otrzymamy, gdy w jakiejś tezie teorii zdań zastąpimy jej część będącą podwójną negacją wyrażenia sensownego przez samo to wyrażenie lub odwrotnie. Np. zastępując w 222,1 lub 222,2 „*NNp*" przez „*p*", otrzymamy tezę 221,1.

222,3 *CCNppp*

a) odwrotne prawo redukcji do absurdu;
b) jeżeli: jeżeli nie *p* to *p*, to *p*;
c) jeżeli *Np* implikuje *p*, to *p* jest prawdziwe;
d) wiadomo, że jeżeli iloczyn dwóch liczb całkowitych *ab* jest podzielny przez liczbę pierwszą *n* oraz *a* nie jest podzielne przez *n*, to *b* jest podzielne przez *n*. Załóżmy, że $a \cdot a = a^2$ jest podzielne przez *n*; jeżeliby przy tym *a* (pierwszy czynnik) nie było podzielne przez *n* (*Np*), to *a* (drugi czynnik) jest podzielne przez *n* (*p*), przeto wniosek, że *a* jest podzielne przez *n* (*p*) (przykład z Euklidesa);
e) teza 222,3 została przytoczoną już poprzednio jako drugi aksjomat układu implikacyjno-negacyjnego. Posiada ona znaczenie historyczne przez to, że dawno zwróciła na siebie uwagę jako zasada dla pewnego sposobu rozumowania niewprost (*reductio ad absurdum*), tzn. przez zaprzeczenie teorematu, który ma być dowiedziony.

222,4 *CCpNpNp*

a) prawo redukcji do absurdu;
b) jeżeli: jeżeli *p* to nie *p*, to nie *p*;
c) jeżeli *p* implikuje *Np*, to *p* fałszywe;
d) przypuśćmy, że równanie $Ax + B = O$ ma dwa równe pierwiastki *a* oraz *b*, mamy przeto $Aa + B = O = Ab + B$ i po wyrachowaniu $a = b$; okazało się, że jeżeliby równanie $Ax + B = O$ miało dwa różne pierwiastki, to oba pierwiastki nie byłyby różne, przeto nieprawda, że wymienione równanie ma dwa różne pierwiastki (Śleszyński);
e) stosując do tezy 222,4 podstawienie *p*/*Np*, otrzymamy z niej według dyrektywy podwójnego przeczenia tezę 222,3 i podobnie z tezy 222,3 otrzymujemy tezę 222,4.

222,5 *CpCNpq*

a) prawo Dunsa Szkota;
b) jeżeli *p*, to jeżeli nie *p*, to *q*;
c) *p* implikuje, że *nie p* implikuje *q*;
d) jeżeli to jest czerwone to — jeżeli to nie jest czerwone — to wszystko jest możliwe (oba przypuszczenia, że to jest czerwone i że to nie jest czerwone, dają sprzeczność, jeżeliby zaś przyjąć, że zachodzi naprawdę sprzeczność, to nic nie przeszkadza, by i cokolwiek innego uznać za równie możliwe);
e) teza ta została podana poprzednio (212) jako trzeci aksjomat implikacyjno-negacyjnego układu aksjomatów. Stosując do niej dyrektywę kommutacji otrzymujemy tezę

222,6 $CNpCpq$

b) jeżeli nie p to, jeżeli p, to q;

c) Np implikuje, że p implikuje q;

d) obie tezy 222,5 i 222,6 mogą służyć za charakterystykę zdania fałszywego. Mianowicie, jeżeli założymy w 222,5, że p prawdziwe, to po oderwaniu otrzymamy implikację $CNpq$, której poprzednik Np jest fałszywy, następnik zaś q jest zdaniem jakimkolwiek; podobnie teza 222,6, gdy założymy, że Np jest prawdziwe, prowadzi do konkluzji Cpq o fałszywym poprzedniku, przy tym zaś zdanie q jest zdaniem jakimkolwiek. Zdanie fałszywe charakteryzuje się przeto tym, że implikuje ono jakiekolwiek inne zdanie. Zarazem każda z obu tez podaje, podobnie jak teza 221,2, warunek wystarczający, aby impli kacja była prawdziwa: prawdziwa jest każda implikacja, której poprzednik jest fałszywy. Mówiąc o niesprzeczności aksjomatów (212) nadmieniliśmy, że wymaganie niesprzeczności ma na celu, aby wśród tez systemu nie było zdania fałszywego. Myśl tę można teraz przedstawić dokładniej. Przypuśćmy, że w obrębie teorii zdań znalazły się jako tezy dwa zdania sprzeczne z i Nz; podstawmy w tezie 222,5 p/z i zastosujmy dwukrotnie dyrektywę odrywania, to otrzymamy q jako tezę. Jednakże q jest zmienną reprezentującą jakiekolwiek zdanie prawdziwe lub fałszywe, byle sensowne, w języku teorii zdań. A zatem w systemie teorii zdań, który by zawierał parę zdań sprzecznych jako tezy, jakiekolwiek zdanie byłoby tezą. Zatarłaby się całkowicie różnica między fałszywością i prawdziwością wyrażeń sensownych.

222,7 $CCpqCNqNp$

a) prawo transpozycji;

b) jeżeli: jeżeli p, to q, to jeżeli nie q, to nie p;

c) jeżeli p implikuje q, to Nq implikuje Np;

d) jeżeli prawdą jest, że jeżeli x jest podzielne przez 6, to x jest podzielne przez 3, to prawdą jest, że jeżeli x nie jest podzielne przez 3, to nie jest podzielne przez 6;

e) prawo transpozycji wskazuje sposób odwracania implikacji przez zanegowanie jej członów i jest podstawą dla wtórnej dyrektywy transpozycji, według której przekształcenie tezy teorii zdań mającej postać implikacji przez przestawienie i zaprzeczenie obu jej członów daje nową tezę teorii zdań. Stosując odpowiednio podstawienia, p/Np oraz q/Nq otrzymujemy za pomocą dyrektywy podwójnej negacji tezy:

222,8 $CCpNqCqNp$

222,9 $CCNpqCNqp$

222,10 $CCNpNqCqp$

które przedstawiają trzy inne postaci prawa transpozycji.

222,11 $CCpqCCNpqq$

a) prawo dylematu konstrukcyjnego;

b) jeżeli Cpq, to, jeżeli $CNpq$, q;

c) jeżeli p implikuje q, to, jeżeli także Np implikuje q, q jest prawdziwe,

d) Kalif Omar tak miał rozumować, nakazując spalić bibliotekę aleksandryjską: Jeżeli te księgi zawierają to samo, co Koran, to są niepotrzebne i należy je spalić; jeżeli nieprawda, że zawierają to samo, co Koran, to są szkodliwe i należy je spalić — przeto w każdym razie należy je spalić;

e) dla zrozumienia tezy 222,11 należy wziąć pod uwagę, że jedno z dwóch zdań p lub Np jest prawdziwe, przeto w jednej z obu implikacji Cpq i $CNpq$ do q jako następnika należy prawdziwy poprzednik; jeżeli zaś implikacja o prawdziwym poprzedniku jest prawdziwa, to następnik również jest prawdziwy.

222,12 $CCpqCCpNqNp$

a) prawo dylematu destrukcyjnego;

b) jeżeli Cpq, to, jeżeli $CpNq$, Np;

c) jeżeli p implikuje q, to, jeżeli p implikuje także Nq, p jest fałszywe;

d) dowód, że przedmiot sprzeczny, np. drewniane żelazo, nie istnieje, odbywa się według tego prawa: Jeżeli coś jest drewnianym żelazem, to jest ciałem palnym (drzewo), lecz jeżeli coś jest drewnianym żelazem, to nie jest ciałem palnym (żelazo), przeto nieprawda, że coś jest drewnianym żelazem;

e) jedno z dwóch zdań, q lub Nq, jest fałszywe, w jednej z obu implikacji do p jako poprzednika należy przeto fałszywy następnik; jeżeli prawdziwa jest implikacja o fałszywym następniku, to poprzednik jest również fałszywy.

222,13 $CpCNqNCpq$

b) jeżeli p, to, jeżeli nie q, nieprawda, że Cpq;

c) jeżeli p prawdziwe, to, jeżeli q fałszywe, nieprawda, że p implikuje q;

d) Jeżeli Jan jest oszczędny, to — jeżeli Jan nie jest skąpy — nie prawda, że jeżeli Jan jest oszczędny, to Jan jest skąpy;

e) teza 222,13 podaje warunek wystarczający fałszywości implikacji: implikacja jest fałszywa, jeżeli jej poprzednik jest prawdziwy i następnik fałszywy.

Teza 222,13 wynika z tezy 221,4 przez zastosowanie dyrektywy transpozycji do wyrażenia $CCpqq$ będącego częścią tezy 221,4.

222,14 $CNCpqNq$
222,15 $CNCpqp$

b) jeżeli nieprawda, że jeżeli p, to q, to nie q (222,14) i jeżeli nieprawda, że jeżeli p, to q, to p (222,15),

d) jeżeli nieprawda, że jeżeli pierwsze czerwone, to drugie zielone, to nieprawda, że drugie zielone; jeżeli nieprawda, że jeżeli pierwsze czerwone, to drugie zielone, to pierwsze czerwone;

e) tezy 222,14 i 222,15 podają warunki konieczne fałszywości implikacji, mianowicie jeżeli implikacja fałszywa, to jej poprzednik prawdziwy a następnik fałszywy. Tezę 222,14 otrzymujemy stosując dyrektywę transpozycji do tezy 221,2; teza 222,15 wynika z tezy 222,6 przez zastosowanie dyrektywy transpozycji i dyrektywy podwójnego przeczenia.

222,16 $CNCpqCpNq$
222,17 $CNCpqCNpq$
222,18 $CNCpqCNpNq$ 222,18ᵃ CNCpqCqp

a) p i e r w s z e, d r u g i e i t r z e c i e p r a w o n e g o w a n i a i m p l i k a c j i;

b) jeżeli nieprawda, że jeżeli p to q, to jeżeli p, to nie q (222,16) i jeżeli nie p, to q (222,17) i jeżeli nie p, to nie q (222,18);

d) jeżeli nieprawda, że jeżeli jedno czerwone (prawda), to drugie zielone (fałsz), to prawda, że jeżeli jedno czerwone (prawda), to drugie nie zielone (prawda) — i prawda, że jeżeli jedno nie czerwone (fałsz) to drugie zielone (fałsz) — i prawda, że jeżeli jedno nie czerwone (fałsz), to drugie nie zielone (prawda);

e) Cpq jest fałszem tylko w przypadku, gdy p prawdziwe i q fałszywe; Nq jest wtedy prawdziwe, Np zaś fałszywe; zatem $CpNq$ jest prawdą jako implikacja o prawdziwym poprzedniku i prawdziwym następniku, $CNpq$ jest prawdą jako implikacja o fałszywym poprzedniku i fałszywym następniku oraz $CNpNq$ jest prawdą jako implikacja o fałszywym poprzedniku i prawdziwym następniku.

222,19 $CCCpqrCNpr$

b) jeżeli: r jeżeli p to q, to jeżeli nie p to r;

c) jeżeli implikacja Cpq implikuje r, to Np implikuje r;

d) jeżeli określony stan układu materialnego w pewnej chwili (p) implikuje również określony stan tegoż układu w chwili następnej (q), to zostaje zachowana zasada determinizmu przyrodniczego (r); stąd wynika, że jeżeli stan układu materialnego w pewnej chwili nie jest określony (Np), to zasada determinizmu nadal zostaje zachowana (r);

e) według tezy 222,6 Np implikuje Cpq, jeżeli przeto Cpq implikuje r, to według dyrektywy sylogizmu także Np implikuje r. CNpCpq

221,20
jedyny skutek równowagi układów

222,10 CCNpNqCqp
221,1 CpCqp
221,7 CCpqCCqrCpr

zą pośrednictwem dyrektywy sylogizmu i I dyrektywy zastępowania tezę 223,8 (odpowiednie podstawienie w 221,7 daje bowiem $CCNpCpqCCCpqqCNpq$).

223,9 $CApAqrAApqr$
223,10 $CAApqrApAqr$

a) prawa łączności dla alternatywy;
b) jeżeli p lub: q lub r, to p lub q — lub r; jeżeli p lub q — lub r, to p lub: q lub r;
c) alternatywa wyrażeń p oraz Aqr implikuje alternatywę wyrażeń Apq oraz r — i odwrotnie;
e) prawa łączności dla alternatywy są analogiczne do arytmetycznego prawa łączności dla dodawania: $a + (b + c) = (a + b) + c$. Opierą się na nich wtórna dyrektywą łączności, pozwalająca dowolnie składać wyrazy wieloczłonowej alternatywy. Prawa łączności dają się uzyskać z prawa kommutacji przez zastosowanie I dyrektywy zastępowania i prawa przemienności alternatywy.

223,11 $CCApqrCpr$
223,12 $CCApqrCqr$

a) odwrotne prawa kompozycji (por. 223,14);
b) jeżeli: jeżeli p lub q to r, to jeżeli p to r; jeżeli: jeżeli p lub q to r, to jeżeli q to r;
c) jeżeli alternatywa dwóch zdań Apq implikuje trzecie zdanie r, to każdy z członów alternatywy z osobna implikuje r;
d) jeżeli w piątek lub sobotę Jan przyjedzie, pójdziemy w niedzielę na wycieczkę; wynika stąd, że jeżeli w piątek Jan przyjedzie, pójdziemy w niedzielę na wycieczkę, a także — jeżeli w sobotę Jan przyjedzie, pójdziemy w niedzielę na wycieczkę;
e) tezy 223,11 i 223,12 wynikają z tez 223,2 i 223,6 według prawa sylogizmu 221,7: daje ono bowiem $CCpApqCCApqrCpr$ i $CCqApqCCApqrCqr$ skąd przez oderwanie 223,2 i 223,6 otrzymuje się 223,11 i 223,12.

223,13 $CCqrCApqApr$

a) prawo sumacji lub prawo dodajnika (alternatywę nazywano w algebrze logiki sumą logiczną, a jej człony dodajnikami);
b) jeżeli: jeżeli q, to r, to: jeżeli p lub q, to p lub r;
c) jeżeli q implikuje r, to p lub q implikuje: p lub r;
d) skoro jeżeli dziś jest piątek, to dziś jest dzień postny, w takim razie, jeżeli dziś jest czwartek lub piątek, to dziś jest czwartek lub dzień postny;

e) teza 223,13 przypomina twierdzenie arytmetyki, według którego (dla liczb całkowitych dodatnich), jeżeli $b=c$, to $a+b=a+c$. Jest ono podstawą dla wtórnej dyrektywy rozumowania, dyrektywy dodajnika, pozwalającej przekształcać tezy teorii zdań postaci „*Cqr*" na tezy postaci *CApqApr*, co jest nieraz przydatne w dowodzeniu.

223,14 *CCprCCqrCApqr*

a) prawo kompozycji poprzedników dla alternatywy;
b) jeżeli *Cpr* to, jeżeli *Cqr*, także *CApqr*;
c) jeżeli *p* implikuje *r*, to — jeżeli *q* implikuje *r* — także *p* lub *q* — implikuje *r*;
d) jeżeli wtorek dzień świąteczny, to jeżeli środa dzień świąteczny, wtorek lub środa dzień świąteczny;
e) teza 223,14 daje wtórną dyrektywę kompozycji poprzedników alternatywy pozwalającą z dwóch implikacji o różnych poprzednikach i wspólnym następniku utworzyć nową implikację, w której poprzedniku jest alternatywa obu poprzedników, a której następnikiem jest wspólny następnik. W ten sposób np. z tez 223,6 i 223,2 można otrzymać 223,5.

223,15 *CCprCCqsCApqArs*

a) ogólne prawo kompozycji dla alternatywy;
b) jeżeli *Cpr*, to, jeżeli *Cqs*, także *CApqArs*;
c) jeżeli *p* implikuje *r*, to — jeżeli *q* implikuje *s* — alternatywa poprzedników *Apq* implikuje alternatywę następników *Ars*;
d) jeżeli pojechawszy na lewo pojadę przez pole, to — jeżeli pojechawszy na prawo, pojadę przez las — pojechawszy na lewo lub na prawo, pojadę przez pole lub przez las;
e) teza 223,15 posiada swój arytmetyczny odpowiednik w regule arytmetyki pozwalającej dodawać stronami równości lub nierówności: jeżeli $a=b$ i $c=d$, to $a+c=b+d$. Tworzy ona podstawę dla wtórnej dyrektywy rozumowania, mianowicie ogólnej dyrektywy kompozycji dla alternatywy pozwalającej na łączenie dwóch implikacji w jedną o alternatywnych członach. Teza 223,14 jest szczególnym przypadkiem tezy 223,15, którą otrzymamy podstawiając *s/r*.

223,16 *CCApqArsACprCqs*

a) prawo wyłączania znaku alternatywy przed implikację,
b) jeżeli: jeżeli *p* lub *q*, to *r* lub *s*, to: jeżeli *p*, to *r* lub jeżeli *q* to *s*;
c) jeżeli *p* lub *q* implikuje *r* lub *s*, to *p* implikuje *r* lub *q* implikuje *s*;
d) jeżeli przyjęcie trucizny lub spożycie zepsutego mięsa powoduje chorobę lub śmierć, to przyjęcie trucizny powoduje chorobę lub spożycie zepsutego mięsa powoduje śmierć;

e) prawo odwrotne (wyłączania znaku implikacji przed alternatywę) nie jest prawdziwe, albowiem *CApqArs* jest prawdziwe tylko pod warunkiem, że obie implikacje *Cpr* i *Cqs* są prawdziwe, nie tylko ich alternatywa (por. 223,15).

223,17 *ApNp*

a) prawo wyłączonego środka;
b) *p* lub nie *p*;
c) *p* jest prawdziwe lub *Np* jest prawdziwe; inaczej: *p* jest prawdziwe lub *p* jest fałszywe;
d) dziś jest środa lub dziś nie jest środa;
e) teza 223,17 jest jedną z niewielu, które nie mają postaci implikacji. Otrzymuje się ją z tezy 221,1 przez podstawienie *p/Np* i zastosowanie I dyrektywy zastępowania łącznie z podstawieniem *q/Np*.

223,18 *CApqCNpq*

a) prawo sylogizmu alternatywnego (*modus tollendo ponens*);
b) jeżeli *p* lub *q*, to jeżeli nie *p*, to *q*;
c) jeżeli prawdą jest: *p* lub *q*, to jeżeli *p* fałszywe, to *q* jest prawdziwe;
d) jeżeli są tu porzeczki czerwone lub białe, to, jeżeli nie-czerwone, są białe;
e) tezę tę wyprowadza się z tezy 221,1 podstawiając *p/CNpq* i stosując I dyrektywę zastępowania.

223,19 *CCNpqApq*

a) odwrotne prawo sylogizmu alternatywnego;
b) jeżeli *CNpq*, to *Apq*;
c) jeżeli nie *p* implikuje *q*, to *p* jest prawdziwe lub *q* jest prawdziwe, (bo jeżeli *p* fałszywe, to nie *p* prawdziwe, a więc i *q* prawdziwe, a jeżeli *q* fałszywe, to wobec założenia *CNpq* także nie *p* fałszywe, czyli *p* prawdziwe);
e) tezę tę wyprowadza się z tezy 221,1 w sposób analogiczny, jak 223,18. Tezy 223,18 i 223,19 okazują, że wyrażenia „*Apq*" i „*CNpq*", według I dyrektywy zastępowania równoznaczne, wzajemnie implikują się, czyli są także równoważne.

223,20 *CCpqANpq*
223,21 *CANpqCpq*.

e) obie te tezy względem siebie odwrotne stanowią przekształcenie tez 223,18 i 223,19 uzyskane przez podstawienie *p/Np* i zastosowanie następnie dyrektywy podwójnego przeczenia. Dają one podstawę do wprowadzenia dyrektywy będącej szczegółowym przypadkiem dyrek-

tywy zastępowania wyrażeń równoważnych i zezwalającej na zastąpienie alternatywy *ANpq* przez implikację *Cpq* i odwrotnie. W alternatywno-negacyjnym układzie aksjomatów związek powyższy służy za definicję wyrażenia „*Cpq*“: „jeżeli *p*, to *q*“, to tyle, co „nie *p* lub *q*“; „jeżeli dziś środa, to jutro czwartek“ to, tyle, co „bądź dziś nie-środa, bądź jutro czwartek“.

223,22 *CCpAqrCNqArNp*
223,23 *CCpAqrCNrAqNp*

a) rozszerzone prawo transpozycji dla alternatywy;
b) jeżeli: skoro *p*, to *q* lub *r*, to skoro nie *q*, to bądź *r*, bądź nie *p*;
c) jeżeli *p* implikuje *Aqr*, to nie-*q* implikuje *ArNp*;
d) jeżeli ryzykując zyskam lub stracę, to skoro nie zyskałem, bądź straciłem, bądź nie ryzykowałem;
e) tezy 223,22, 223,23 dają wtórną dyrektywę transponowania implikacji, w której następniku występuje alternatywa. Negacja jednego z członów alternatywy implikuje alternatywę drugiego członu i zanegowanego poprzednika implikacji.

223,24 *CNCApqArsANCprNCqs*

a) drugie prawo wyłączenia znaku alternatywy przed implikację (dla zaprzeczonej implikacji — por. 223,16),
b) jeżeli nieprawda, że jeżeli *p* lub *q*, to *r* lub *s*, to bądź nieprawda, że jeżeli *p*, to *r*, bądź nieprawda, że jeżeli *q*, to *s*.

4. Koniunkcja („*C*“, „*N*“, „*A*“, „*K*“)

224,1 *CpKpp*

a) prawo tautologii dla koniunkcji;
b) jeżeli *p*, to p i *p*;
e) teza 224,1 wynika z tezy 222,4 *CCpNpNp* po przekształceniu jej według dyrektywy transpozycji i podwójnego przeczenia na *CpNCpNp*; w tym zaś wyrażeniu zastępuje się „*NCpNp*“ przez „*Kpp*“ według II dyrektywy zastępowania wraz z podstawieniem *q*/*p*.

224,2 *CKpqp*

a) prawo symplifikacji dla koniunkcji;
b) jeżeli *p* i *q*, to *p*;
c) jeżeli *Kpq* prawdziwe, to *p* prawdziwe;
d) jeżeli dziś jest środa 3 maja, to dziś jest środa;

e) teza 224,2 pozwala za pomocą dyrektywy sylogizmu przekształcić implikację, której następnikiem jest koniunkcja, na implikację, której następnikiem jest pierwszy człon tej koniunkcji. Podstawiając w 224,2 q/p otrzymujemy:

224,3 *CKppp*

a) odwrócenie prawa tautologii 224,1.

224,4 *CKpqKqp*

a) prawo przemienności dla koniunkcji;
b) jeżeli p i q, to q i p;
e) prawo przemienności dla koniunkcji jest jedną z analogii między koniunkcją i mnożeniem w arytmetyce ($ab = ba$). Teza 224,4 przechodzi przez podstawienie p/q, q/p w tezę odwrotną

224,5 *CKqpKpq*

e) obie tezy 224,4 i 224,5 są podstawą dla dyrektywy przemienności koniunkcji analogicznej do dyrektywy przemienności alternatywy

Podstawiając w tezie 224,2 p/q, q/p i stosując wymienioną dyrektywę otrzymamy tezę

224,6 *CKpqq*

e) tezy 224,2 i 224,6 stwierdzają łącznie warunek konieczny prawdziwości koniunkcji: jeżeli prawdziwa jest koniunkcja dwóch zdań, to prawdziwe jest każde z tych zdań z osobna.

224,7 *CKpKqrKKpqr*
224,8 *CKKpqrKpKqr*

a) prawo łączności dla koniunkcji;
c) koniunkcja wyrażeń p i *Kqr* implikuje koniunkcję *Kpq* i r — a tak samo odwrotnie;
d) jeżeli pies jest czarny i jest kundysem brzydkim, to jest czarnym kundysem i jest brzydki — i odwrotnie;
e) prawa łączności dla koniunkcji są analogiczne do arytmetycznego prawa łączności dla mnożenia $a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$. Opiera się na nich wtórna dyrektywa łączności dla koniunkcji, pozwalająca dowolnie składać wyrazy wieloczłonowej koniunkcji.

224,9 *CCpqCKprKqr*

a) prawo mnożnika;
b) jeżeli *Cpq*, to jeżeli p i r, to q i r;
c) jeżeli p implikuje q, to *Kpr* implikuje *Kqr*;

d) jeżeli stąd, że *x* jest podzielne przez *a*, wynika, że *x* jest podzielne przez *b*, to stąd, że *x* jest podzielne przez *a* i *c*, wynika, że jest podzielne przez *b* i *c*;

e) teza 224,9 jest analogiczna do twierdzenia arytmetyki, według którego, jeżeli $a \leq b$, to $ac \leq bc$ (*a*, *b*, *c* liczby całkowite dodatnie). Jest ona podstawą dla ważnej dyrektywy mnożnika, pozwalającej przekształcać tezy logiki zdań postaci „*Cpq*" na tezy postaci „*CKprKqr*".

224,10 *CCpqCCprCpKqr*

a) prawo kompozycji następników dla koniunkcji;

b) jeżeli *Cpq*, to — jeżeli *Cpr* — *CpKqr*;

c) jeżeli *p* implikuje *q*, to, jeżeli *p* implikuje *r*, *p* implikuje *Kqr*;

e) związana z tezą 224,10 wtórna dyrektywa kompozycji następników dla koniunkcji pozwala łączyć implikacje o wspólnym poprzedniku.

224,11 *CCprCCqsCKpqKrs*

a) ogólne prawo kompozycji dla koniunkcji;

b) jeżeli *Cpr*, to — jeżeli *Cqs* — *CKpqKrs*;

c) jeżeli *p* implikuje *r*, to, jeżeli nadto *q* implikuje *s* — koniunkcja poprzedników *Kpq* implikuje koniunkcję następników *Krs*;

e) uwagi dołączone do tezy 223,13 pod e) dają się z odpowiednimi modyfikacjami zastosować do tezy 224,11 wraz z należącą do niej ogólną dyrektywą kompozycji dla koniunkcji.

224,12 *CCpCqrCKpqr*

a) prawo włączania (importacji);

b) jeżeli *CpCqr*, to *CKpqr*;

c) jeżeli *p* implikuje, że *q* implikuje *r*, to *Kpq* implikuje *r*;

e) na tezie tej opiera się dyrektywa włączania, która pozwala „włączać" zdanie *p* implikujące jakąś implikację do jej poprzednika, przez co ten poprzednik *q* przekształca się na koniunkcję obu poprzedników *Kpq*. Według dyrektywy włączania otrzymuje nową postać szereg twierdzeń omówionych poprzednio — a mianowicie twierdzenia:

prawo sylogizmu kategoryczno-hipotetycznego *modus ponens* 221,4

CpCCpqq 224,13 *CKpCpqq*

prawo sylogizmu hipotetycznego 221,7

CCpqCCqrCpr 224,14 *CKCpqCqrCpr*

prawo dylematu konstrukcyjnego 222,11

CCpqCCNpqq 224,15 *CKCpqCNpqq*

prawo dylematu destrukcyjnego 222,12
224,16 CKCpqCpNqNp

prawo kompozycji poprzedników alternatywy 223,12
224,17 CKCprCqrCApqr

ogólne prawo kompozycji dla alternatywy 223,13
224,18 CKCprCqsCApqArs

prawo kompozycji następników koniunkcji 224,10
224,19 CKCpqCprCpKqr

ogólne prawo kompozycji dla koniunkcji 224,11
224,20 CKCprCqsCKpqKrs

Tezy powyższe są łatwiejsze do wypowiedzenia w języku potocznym od tez w postaci pierwotnej (brzmią one „jeżeli *p* i *q*, to *r*", zamiast jak w postaci pierwotnej — „jeżeli *p*, to jeżeli *q*, to *r*"); jednakże nie są odpowiednie dla rozumowań według dyrektywy odrywania. Dyrektywa ta może być bowiem zastosowana jedynie do implikacji, której poprzednikiem jest teza logiki zdań; może być zastosowana wielokrotnie, ale odrywamy zawsze tylko od tezy logiki zdań jej następnik: tak w wyrażeniu *CpCqr*, jeżeli *p*, *q* są tezami logiki zdań, stosujemy dyrektywę odrywania dwukrotnie, aby otrzymać tezę *r*. Jeżeli natomiast tezę *CpCqr* przekształcimy według dyrektywy włączania na *CKpqr*, to poprzednikiem tej tezy jest koniunkcja dwóch zdań *Kpq*, i jeżeli nawet oba te zdania z osobna wzięte są tezami, to brak nam dotąd dyrektywy, która by gwarantowała, że także ich koniunkcja jest tezą — i uprawniała tym samym do zastosowania dyrektywy odrywania (dyrektywy takiej dostarczy dopiero teza 224,22.

224,21 CCKpqrCpCqr

a) prawo wyłączania (eksportacji);
b) jeżeli *CKpqr*, to *CpCqr*;
c) jeżeli koniunkcja zdań *p* i *q* implikuje *r*, to *p* implikuje, że *q* implikuje *r*;
d) stąd, że jeżeli *x* jest podzielne przez *2* i przez *3*, to jest podzielne przez *6*, wynika, że jeżeli *x* jest podzielne przez *2*, to jeżeli jest podzielne przez *3*, to jest podzielne przez *6*;
e) prawo wyłączania jest odwrotnością prawa włączania i stanowi podstawę dla dyrektywy wyłączania zezwalającej na rozbicie implikacji, która zawiera koniunkcję w poprzedniku na podwójną implikację.

Podstawmy w tezie 224,21 *r*/*Kpq*, to otrzymamy w poprzedniku tezę 221,1, w której *p*/*Kpq*; można więc zastosować dyrektywę odrywania, aby uzyskać tezę

224,22 $CpCqKpq$

c) jeżeli p prawdziwe, to, jeżeli q prawdziwe, prawdziwa jest koniunkcja Kpq;

e) teza 224,22 jest podstawą dla dyrektywy wtórnej, według której wolno uznać koniunkcję Kpq za tezę logiki zdań, jeżeli p i q są tezami. Zarazem teza ta wraz z 224,2 i 224,6 charakteryzuje koniunkcję jako funkcję prawdziwościową, której wartością jest prawda zawsze i tylko, jeżeli oba argumenty są prawdziwe.

224,23 $NKpNp$

a) prawo sprzeczności;

b) nieprawda, że p i Np;

c) nieprawda, że p prawdziwe i p fałszywe (lub Np prawdziwe);

d) nieprawda, że dziś jest wtorek i dziś nie jest wtorek;

e) teza 224,23 wraz z tezą 223,15 (prawem wyłączonego środka) może służyć do scharakteryzowania negacji jako funkcji prawdziwościowej, mianowicie według 224,23 stwierdzamy, że jeżeli p prawdziwe, to Np jest fałszywe; według zaś 223,15, jeżeli p fałszywe, to Np jest prawdziwe. Tezę 224,23 można, podobnie jak tezę 223,15, otrzymać z tezy 221,1 Trzeba w tym celu tezę 221,1 przekształcić za pomocą dyrektywy podwójnego przeczenia na wyrażenie $NNCpNNp$, a następnie zastosować II dyrektywę zastępowania łącznie z podstawieniem q/Np.

224,24 $CKpqNCpNq$

b) jeżeli p i q, to nieprawda, że jeżeli p to Nq;

c) Kpq implikuje, że $CpNq$ jest fałszywe;

d) jeżeli środa jest 3 maja, to nieprawda, że jeżeli środa, to nie jest 3 maja;

224,25 $CNCpNqKpq$

b) jeżeli nieprawda, że jeżeli p, to Nq, to p i q;

c) fałszywość zdania $CpNq$ implikuje Kpq;

d) jeżeli nieprawda, że jeżeli środa, to nie jest 3 maja, to środa jest 3 maja;

e) tezy 224,24 i 224,25, analogicznie jak poprzednio tezy 223,16 i 223,17, można uzyskać z tezy 221,1 według II dyrektywy zastępowania. Okazują one równoważność koniunkcji Kpq z wyrażeniem $NCpNq$.

224,26 $CCpqNKpNq$

b) jeżeli prawda, że jeżeli p, to q, to nieprawda, że p i Nq;

c) Cpq implikuje, że nieprawda, by p było prawdziwe i q fałszywe;

d) jeżeli prawda, że jeżeli dziś środa, to jutro czwartek, to nieprawda, że dziś środa i jutro nie czwartek.

224,27 *CNKpNqCpq*

b) jeżeli nieprawda, że *p* i *Nq*, to jeżeli *p*, to *q*;

c) zaprzeczenie *KpNq* implikuje *Cpq*;

d) jeżeli nieprawda, że dziś środa i jutro nie czwartek, to prawda, że jeżeli dziś środa, to jutro czwartek;

e) tezy 224,26 i 224,27 wynikają odpowiednio z 224,24 i 224,25 przez zastosowanie podstawienia *q/Nq* oraz dyrektyw transpozycji i podwójnego przeczenia. Jak tezy 224,24 i 224,25 pozwalają na wyrażenie koniunkcji przez implikację i negację (*p* i *q*, zawsze i tylko, jeżeli nieprawda, że jeżeli *p*, to nie *q*), tak tezy 224,26 i 224,27 pozwalają wyrazić implikację przez koniunkcję i negację (jeżeli *p* to *q*, zawsze i tylko, jeżeli nieprawda, że *p* i *Nq*): związek ten służy często do scharakteryzowania implikacji i był znany już w logice stoickiej.

224,28 *CKpqNCpNCpq*
224,29 *CNCpNCpqKpq*

b) jeżeli *p* i *q*, to nieprawda, że jeżeli *p*, to nieprawda, że jeżeli *p* to *q*;
jeżeli nieprawda, że jeżeli *p*, to nieprawda, że jeżeli *p*, to *q*, to *p* i *q*;

c) *Kpq* implikuje zaprzeczenie implikacji między *p* i zaprzeczeniem *Cpq*;
zaprzeczenie implikacji między *p* i zaprzeczeniem *Cpq* implikuje *Kpq*;

e) tezy 224,28 i 224,29 prowadzą do dyrektywy, która pozwala zastąpić „*Kpq*" przez wyrażenie „*NCpNCpq*" zbudowane z wyrazów pierwotnych inaczej, niż podaje II dyrektywa zastępowania; są one pod tym względem pokrewne z tezami 223,7 i 223,8, które dają analogiczną swobodę dla alternatywy w stosunku do I dyrektywy zastępowania.

224,30 *CCKpqrCKpNrNq*
224,31 *CCKpqrCKNrqNp*

a) rozszerzone prawo transpozycji;

b) jeżeli: jeżeli *p* i *q*, to *r*, to jeżeli *p* i nie *r*, to nie *q*;
jeżeli: jeżeli *p* i *q*, to *r*, to jeżeli nie *r* i *q*, to nie *p*;

c) jeżeli koniunkcja zdań *p* i *q* implikuje *r*, to koniunkcja *p* i *Nr* implikuje *Nq*, a koniunkcja *Nr* i *q* implikuje *Np*:

d) jeżeli: Każde M jest P
Każde S jest M (Barbara)
Każde S jest P

to Każde M jest P
Niektóre S nie są P (Baroco)
Niektóre S nie są M

lub: Niektóre S nie są P
Każde S jest M (Bocardo)
Niektóre M nie są P

e) Tezy 224,30 i 224,31 dają wtórną dyrektywę transponowania implikacji, w której poprzedniku występuje koniunkcja dwóch zdań: jeden z poprzedników wraz z negacją następnika implikuje negację drugiego z poprzedników. Dyrektywą tą posługiwała się logika klasyczna przy redukcji trybów sylogistycznych *Baroco* i *Bocardo* do *Barbara*.

224,32 *CKNCprNCqsNCKpqKrs*

a) drugie prawo kompozycji dla koniunkcji (względem zaprzeczenia implikacji — por. 224,20);
b) jeżeli nieprawda, że jeżeli *p*, to *r* i nieprawda, że jeżeli *q*, to *s*, to nieprawda, że jeżeli *p* i *q*, to *r* i *s*.

224,33 *CKpAqrAKpqKpr*

a) prawo rozdzielności (dystrybucji) dla koniunkcji względem alternatywy:
b) jeżeli *p* i nadto *q* lub *r*, to *p* i *q* lub *p* i *r*;
d) jeżeli będę nieobecny dziś i jutro lub pojutrze, to będę nieobecny dziś i jutro lub dziś i pojutrze.

224,34 *CAKpqKprKpAqr*

a) odwrotne prawo rozdzielności dla koniunkcji względem alternatywy;
b) jeżeli *p* i *q* lub *p* i *r*, to *p* i nadto *q* lub *r*;
d) jeżeli będę nieobecny dziś i jutro lub dziś i pojutrze, to będę nieobecny dziś i jutro lub pojutrze;
e) oba ostatnie prawa przypominają arytmetyczne prawo rozdzielności dla mnożenia względem dodawania $a\ (b + c) = ab + ac$ (koniunkcja odpowiada mnożeniu, alternatywa — dodawaniu).

224,35 *CApKqrKApqApr*

a) prawo rozdzielności dla alternatywy względem koniunkcji;
b) jeżeli *p* lub (*q* i *r*), to *p* lub *q* — i *p* lub *r*;
d) jeżeli pójdę na spacer — lub zostanę w domu i będę czytał, to pójdę na spacer lub zostanę w domu — i pójdę na spacer lub będę czytał.

224,36 *CKApqAprApKqr*

a) odwrotne prawo rozdzielności dla alternatywy względem koniunkcji;
b) jeżeli *p* lub *q* i *p* lub *r*, to *p* lub (*q* i *r*);
d) jeżeli pójdę na spacer lub zostanę w domu — i pójdę na spacer lub będę czytał, to pójdę na spacer — lub zostanę w domu i będę czytał;

e) arytmetyczny odpowiednik praw 224,35 i 224,36 posiadałby postać $a + bc = (a + b)(a + c)$; prawo takie jednak w arytmetyce nie jest ważne, brak bowiem w arytmetyce odpowiedników dla praw tautologii i symplifikacji, które umożliwiają uzyskanie praw 224,35 i 224,36.

224,37 *CAKprKqsKApqArs*

a) prawo wyłączania znaku koniunkcji przed alternatywę;
b) jeżeli *p* i *r* lub *q* i *s*, to *p* lub *q* i *r* lub *s*;
c) alternatywa dwóch koniunkcji implikuje koniunkcję alternatywy ich poprzedników z alternatywą następników;
d) jeżeli jutro będzie pogodnie i ciepło lub chmurno i chłodno, to będzie pogodnie lub chmurno i ciepło lub chłodno;
e) prawo odwrotne wyłączania alternatywy przed koniunkcję nie jest ważne (nie można wnioskować: jeżeli jutro będzie pogodnie lub chmurno i ciepło lub chłodno, to będzie pogodnie i ciepło lub chmurno i chłodno — mogłoby bowiem też być pogodnie i chłodno lub chmurno i ciepło).

224,38 *CNKpqANpNq*

a) prawo negowania koniunkcji;
b) jeżeli nieprawda, że *p* i *q*, to nieprawda, że *p*, lub nieprawda, że *q*;
c) negacja koniunkcji implikuje alternatywę zaprzeczonych jej członów;
d) jeżeli nieprawda, że dziś jest środą 3 maja, to bądź dziś nie jest środa, bądź dziś nie jest 3 maja.

224,39 *CANpNqNKpq*

a) odwrócenie tezy 224,38;
b) jeżeli *Np* lub *Nq*, to nieprawda, że *p* i *q*;
c) negacja koniunkcji jest implikowana przez alternatywę zaprzeczonych jej członów;
d) jeżeli bądź dziś nie jest środa, bądź dziś nie jest 3 maja, to nieprawda, że dziś jest środa 3 maja;
e) obie tezy 224,38 i 224,39 łącznie noszą nazwę prawa De Morgana dla koniunkcji. Są one podstawą bardzo ważnej dyrektywy negowania koniunkcji, według której negacja koniunkcji jest alternatywą zaprzeczonych jej członów.

224,40 *CNApqKNpNq*

a) prawo negowania alternatywy;
b) jeżeli nieprawda, że *p* lub *q*, to nie *p* i nie *q*;
c) negacja alternatywy implikuje koniunkcję zaprzeczonych jej członów;
d) jeżeli nieprawda, że otrzymam list dziś lub jutro, to ani dziś nie otrzymam listu, ani jutro.

224,41 *CKNpNqNApq*

a) odwrócenie tezy 224,40;
b) jeżeli *Np* i *Nq*, to nieprawda, że *p* lub *q*,
c) negacja alternatywy jest implikowana przez koniunkcję zaprzeczonych jej członów;
d) jeżeli ani dziś nie otrzymam listu, ani jutro, to nieprawda, że otrzymam list dziś lub jutro;
e) obie tezy 224,40 i 224,41 łącznie noszą nazwę prawa De Morgana dla alternatywy. Są one podstawą dyrektywy negowania alternatywy analogicznej z wymienioną poprzednio dyrektywą negowania koniunkcji.

Za pomocą podstawień *p/Np*, *q/Nq* oraz dyrektyw transpozycji, i podwójnego przeczenia można prawa De Morgana przerobić tak: aby pozwoliły na wyrażenie koniunkcji przez alternatywę i odwrotnie

224,42 *CKpqNANpNq*
224,43 *CNANpNqKpq*
224,44 *CApqNKNpNq*
224,45 *CNKNpNqApq*

Tezy powyższe są zbudowane symetrycznie ze względu na funktory *A* i *K*; zawarte w nich związki powodują, iż między tezami dotyczącymi alternatywy i koniunkcji zachodzi pokrewieństwo ujęte w zasadzie dualnego odpowiadania sobie alternatywy i koniunkcji. Zasada ta powiada, że przez:

a) zastąpienie „*Kpq*" przez „*NANpNq*" oraz „*Apq*" przez „*NKNpNq*", b) zastosowanie transpozycji dla uniknięcia znaku negacji przed koniunkcją lub alternatywą i c) podstawienie za zmienne, przy których występują znaki negacji, ich negacyj, aby (według dyrektywy podwójnej negacji) pozbyć się negacji przy zmiennych, przechodzimy od tezy zawierającej jedną z funkcyj alternatywy lub koniunkcji do tezy zawierającej drugą z tych funkcyj i odpowiadającej dualnie tezie pierwotnej. W ten sposób odpowiadają sobie dualnie tezy 223,3 i 224,3, mianowicie wychodząc od tezy 223,3 *CpApp* i stosując wymienione przekształcenia, mamy kolejno: a) *CpNKNpNp*, b) *CKNpNpNp*, c) *CKppp*, tj. tezę 224,3.

Odpowiadają sobie dualnie:
prawa tautologii 223,3 — 224,3, 223,1 — 224,1
prawa symplifikacji 223,2 — 224,6, 223,6 — 224,2
prawa przemienności 223,4 — 224,5, 223,5 — 224,4
prawa dodajnika i mnożnika 223,13 — 224,9
prawa kompozycji poprzedników i następników 223,14 — 224,10
prawa kompozycji 223,15 — 224,11, 223,16 — 224,32

3,1 CAppp
3,2 CpApq
3,4 CApqAqp
3,13 CCqrCApqApr
3,14 CCprCCqrCApqr
Equivalence 3,9; 3,10 - 4,7; 4,8.

prawa wyłączonego środka i sprzeczności 223,17 — 224,23
prawa 223,19 — 224,24, 223,18 — 224,25, 223,20 — 224,26, 223,21 — 224,27, 223,24 — 224,20, 223,7 — 224,29, 223,8 — 224,28
rozszerzone prawo transpozycji 223,22 — 224,30, 223,23 — 224,31
prawa rozdzielności 224,33 — 224,36, 224,34 — 224,35
prawa De Morgana 224,38 — 224,41, 224,39 — 224,40.

Twierdzenia, które jak 224,9, nie posiadają symetrycznego odpowiednika, przechodzą po przekształceniu dualnym same w siebie.

5. Dysjunkcja („C“, „N“, „A“, „K“, „D“)

225,1 $CDpqCpNq$

b) jeżeli p albo q, to jeżeli p, to Nq;
c) jeżeli p wyklucza q, to p implikuje Nq;
d) jeżeli mam wybrać między lewym a prawym, to jeżeli wybiorę lewe, to nie wybiorę prawego.

225,2 $CCpNqDpq$

b) jeżeli prawda, że jeżeli p, to Nq, to p albo q;
c) jeżeli p implikuje Nq, to p wyklucza q;
d) jeżeli wybierając to, nie wybiorę owego, to wybieram między tym a owym;
e) tezy 225,1 i 225,2 okazują, że wyrażenia „Dpq“ i „$CpNq$“, które według III dyrektywy zastępowania są równoznaczne, wzajemnie implikują się, czyli są równoważne.

225,3 $CDpqANpNq$

b) jeżeli p albo q, to Np lub Nq;
c) dysjunkcja dwóch zdań implikuje alternatywę ich zaprzeczeń;
d) jeżeli zajdzie to albo tamto (tylko jedno z dwojga), to zarazem nie zajdzie to lub tamto (przynajmniej jedno z dwojga).

225,4 $CANpNqDpq$

b) jeżeli Np lub Nq, to p albo q;
c) dysjunkcja dwóch zdań jest implikowana przez alternatywę ich zaprzeczeń;
d) jeżeli bądź nie zobaczę się z Janem, bądź nie napiszę listu do Piotra, to mam do wyboru jedno z dwojga: zobaczyć się z Janem albo napisać list do Piotra;
e) tezy 225,3 i 225,4 mają za przedmiot stosunek dysjunkcji do alternatywy. Są one podstawą dyrektywy wtórnej, która pozwala zastąpić dysjunkcję „Dpq“ (p wyklucza q) przez wyrażenie „$ANpNq$“ (p jest fałszywe lub q jest fałszywe).

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

225,5 $CDpqNKpq$

b) jeżeli p albo q, to nieprawda, że p i q;
c) dysjunkcja zdań p, q. implikuje negację ich koniunkcji.

225,6 $CNKpqDpq$

b) jeżeli nieprawda, że p i q, to p albo q;
c) dysjunkcja zdań p, q jest implikowana przez negację ich koniunkcji.
e) tezy 225,5 i 225,6 mają za przedmiot stosunek dysjunkcji do koniunkcji. Są one podstawą dyrektywy wtórnej, która pozwala zastąpić dysjunkcję przez zaprzeczenie koniunkcji.

225,7 $CDppNp$

b) jeżeli p albo p, to nie p;
c) jeżeli p wyklucza p, to p fałszywe;
e) tezę 225,7 otrzymujemy z tezy 222,4 stosując III dyrektywę zastępowania z podstawieniem q/p. Jeżeli jakieś zdanie wyklucza siebie, czyli implikuje, że jest fałszywe, to jest fałszywe.

225,8 $CNpDpp$

b) jeżeli Np, to p albo p;
c) jeżeli p fałszywe, to p wyklucza p;
e) tezę 225,8 otrzymujemy z tezy 222,6, jeżeli podstawimy w niej q/Np i zastosujemy III dyrektywę zastępowania z podstawieniem q/p. Tezy 225,7 i 225,8 pozwalają na wprowadzenie wtórnej dyrektywy zastępowania między wyrażeniami „Np" i „Dpp" oraz wskazują, w jaki sposób możliwy jest układ aksjomatyczny o dysjunkcji jako jedynym wyrazie pierwotnym. Widzimy, że przez dysjunkcję może być zdefiniowana negacja, i dalej, podstawiając w 225,1 i 225,2 q/Nq i stosując dyrektywę podwójnego przeczenia oraz dyrektywę zastępowania „Np" przez „Dpp". dochodzimy do tez:

225,9 $CCpqDpDqq$
225,10 $CDpDqqCpq$,

które pozwalają zastąpić i zdefiniować wyrażenie „Cpq" przez „$DpDqq$"; mając zaś zdefiniowane wyrażenia „Np" i „Cpq", umiemy za ich pomocą zdefiniować wszelkie inne funkcje zdaniowe logiki zdań.

225,11 $CDpqDqp$

a) prawo przemienności dla dysjunkcji;
b) jeżeli p albo q, to q albo p;
c) jeżeli p wyklucza q, to q wyklucza p.

225,12 *DDpDqrDDpDrpDDsqDDpsDps*

a) aksjomat Nicoda-Łukasiewicza;

e) teza powyższa tworzy jedyny aksjomat teorii zdań oparty na dysjunkcji jako jedynym wyrazie pierwotnym. Napiszmy dla skrócenia: „*DpDqr*" = „α", „*DpDrp*" = „β", „*DDsqDDpsDps*" = „γ"; wskutek tego aksjomat otrzymuje postać: „*D*α*D*$\beta\gamma$". Stosując dyrektywę zastępowania wyrażeń równoważnych można napisać według tez 225,7 i 225,8 „*Np*" zamiast „*Dpp*", według tez 225,5 i 225,6 „*NKpq*" zamiast „*Dpq*", według zaś tez 225,1 i 225,2, „*CpNq*" zamiast „*Dpq*". W ten sposób „*D*α*D*$\beta\gamma$" przekształca się na „*C*α*ND*$\beta\gamma$" i następnie na „*C*α*NNK*$\beta\gamma$", i wreszcie według dyrektywy podwójnej negacji na „*C*α*K*$\beta\gamma$". Podobnie przekształca się „α" na „*CpKqr*", „β" na „*CpKrp*" oraz „γ" na „*CDsqNDDpsDps*" i kolejno na „*CNKsqNNDps*" — „*CNKsqNKps*" — „*CKpsKsq*", tak iż wreszcie teza 225,12 otrzymuje postać „*CCpKqrKCpKrpCKpsKsq*", co odczytuje się słowami: Jeżeli *p* implikuje *Kqr*, to *p* implikuje *Krp* i *Kps* implikuje *Ksq*. W tej postaci staje się widoczne, że w tezie 225,12 są uwikłane tezy 221,1 *Cpp*, 224,2 *CKpqp* oraz 224,9 *CCpqCKprKqr*.

6. Równoważność („*C*", „*N*", „*A*", „*K*", „*D*", „*E*")

226,1 *Epp*

a) prawo tautologii dla równoważności:

b) zawsze i tylko, jeżeli *p* to *p*;

c) *p* jest równoważne *p*.

226,2 *CEpqEqp*

a) prawo przemienności dla równoważności;

b) jeżeli: zawsze i tylko jeżeli *p* to *q*, to zawsze i tylko jeżeli *q*, to *p*;

c) jeżeli *p* równoważne *q*, to *q* równoważne *p*.

226,3 *CEpEqrEEpqr*

226,4 *CEEpqrEpEqr*

a) prawa łączności dla równoważności;

b) jeżeli: zawsze i tylko jeżeli *p*, to: zawsze i tylko jeżeli *q*, to *r* — to zawsze i tylko jeżeli: zawsze i tylko jeżeli *p*, to *q*, to *r* — i odwrotnie,

c) jeżeli *p* jest równoważne zdaniu: *q* jest równoważne *r*, to zdanie: *p* jest równoważne *q* — jest równoważne zdaniu r;

d) jeżeli „po piątku następuje sobota" jest równoważne ze stwierdzeniem: „zawsze i tylko jeżeli dziś jest piątek, to jutro jest sobota", to stwierdzenie, że „dziś jest piątek" jest równoważne stwierdzeniu „po piątku następuje sobota" — jest równoważne stwierdzeniu „jutro jest sobota",

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

(bo „dziś jest piątek" jest równoważne zdaniu prawdziwemu „po piątku następuje sobota" tylko w przypadku, w którym „dziś jest piątek" jest zdaniem prawdziwym; wymieniona równoważność pociąga więc za sobą także prawdziwość zdania „jutro jest sobota"; jeżeli, przeciwnie, równoważność nie jest prawdziwa, to nie jest prawdą, że dziś jest piątek" i nie jest też prawdą „jutro jest sobota");

e) prawo łączności dla równoważności *EEpEqrEEpqr* jest jednym z dwóch aksjomatów, na których można zbudować system obejmujący wszystkie twierdzenia teorii dedukcji, zawierające „*E*" jako jedyny wyraz stały.

226,5 *CEpqCEqrEpr*

a) prawo sylogizmu dla równoważności;

b) jeżeli: zawsze i tylko jeżeli p, to q, to jeżeli zawsze i tylko jeżeli q, to r, to zawsze i tylko jeżeli p, to r;

c) jeżeli p równoważne q, to jeżeli q równoważne r, to p równoważne r.

226,6 *CCpqCCqpEpq*

b) jeżeli prawda, że jeżeli p, to q, to jeżeli prawda, że jeżeli q, to p, to zawsze i tylko jeżeli p, to q;

c) jeżeli p implikuje q, to jeżeli q implikuje p, to p jest równoważne z q;

e) teza 226,6 jest podstawą dla dyrektywy wtórnej, która pozwala na uznanie równoważności dwóch wyrażeń, jeżeli zachodzi między nimi obustronna implikacja. Związek ten najdokładniej oddaje potoczny sens równoważności zawarty w słowach „zawsze i tylko jeżeli". Według powyższej dyrektywy następujące prawa mogą być wyrażone w postaci równoważności:

prawo tożsamości (teza 221,1 — por. tezę 226,1)
prawo komutacji hipotez (teza 221,6)
prawo podwójnego przeczenia (tezy 222,1 i 222,2)
prawo transpozycji (teza 222,7)
prawo tautologii dla alternatywy (tezy 223,1 i 223,3)
prawo przemienności dla alternatywy (teza 223,4)
prawo łączności dla alternatywy (tezy 223,9 i 223,10)
prawo związku między alternatywą i implikacją (tezy 223,7 i 223,8)
prawo związku między alternatywą oraz implikacją i negacją (tezy 223,18 i 223,19 oraz 223,20 i 223,21)
prawo tautologii dla koniunkcji (tezy 224,1 i 224,3)
prawo przemienności dla koniunkcji (teza 224,4)
prawo łączności dla koniunkcji (tezy 224,7 i 224,8)
prawo włączania i wyłączania (tezy 224,12 i 224,21)
prawo związku między koniunkcją oraz implikacją i negacją (tezy 224,24 i 224,25 oraz 224,26 i 224,27)

prawo rozdzielności dla koniunkcji względem alternatywy (tezy 224,33 i 224,34)

prawo rozdzielności dla alternatywy względem koniunkcji (tezy 224,35 i 224,36)

prawo De Morgana dla koniunkcji (tezy 224,38 i 224,39 oraz 224,42 i 224,43)

prawo De Morgana dla alternatywy (tezy 224,40 i 224,41 oraz 224,44 i 224,45)

prawo związku między dysjunkcją oraz implikacją i negacją (tezy 225,1 i 225,2)

prawo związku między dysjunkcją oraz alternatywą i negacją (tezy 225,3 i 225,4)

prawo związku między dysjunkcją oraz koniunkcją i negacją (tezy 225,5 i 225,6)

prawo związku między dysjunkcją oraz negacją (tezy 225,7 i 225,8)

prawo przemienności dla dysjunkcji (teza 225,11)

prawo przemienności dla równoważności (teza 226,2)

prawo łączności dla równoważności (teza 226,3 i 226,4)

prawo związku między równoważnością oraz koniunkcją i implikacją (tezy 226,8 i 226,9).

226,7 *EEpqNCCpqNCqp*

c) *Epq* jest równoważne zanegowanej implikacji między *Cpq* i *NCqp*;

e) teza 226,7 odpowiada IV dyrektywie zastępowania; według II dyrektywy zastępowania wyrażenie „*NCpNq*" jest równoznaczne z wyrażeniem „*Kpq*"; jeżeli w tym związku równoznaczności położymy *p*/*Cpq* oraz *q*/*Cqp*, to teza 226,7 przekształca się na związek między równoważnością a koniunkcją odwrotnych implikacyj, wyrażony poniżej w tezach 226,8 i 226,9:

226,8 *CKCpqCqpEpq*

c) teza 226,8 jest przekształceniem tezy 226,5 według dyrektywy włączania; [6

226,9 *CEpqKCpqCqp*

e) tezy 226,8 i 226,9 odwrotne względem siebie ujmują potoczny sens wyrażenia „zawsze i tylko jeżeli *p*, to *q*", jako „jeżeli *p*, to *q* i jeżeli *q*, to *p*". Według dyrektywy wtórnej, opartej na tezie 226,6, łączymy je w tezę

226,10 EEpqKCpqCqp

~~226,11 ECpqEpKpq~~

226,12 ECpqEqApq

a) prawa przekształcania implikacji na równoważność,

c) Cpq jest równoważne EpKpq lub EqApq;
inaczej: poprzednik implikacji jest równoważny koniunkcji poprzednika z następnikiem, jej zaś następnik jest równoważny alternatywie poprzednika i następnika;

d) „jeżeli pierwsze, to drugie", to tyle, co „pierwsze i drugie zawsze i tylko, jeżeli pierwsze" oraz „pierwsze lub drugie zawsze i tylko, jeżeli drugie".

e) tezy 226,11 i 226,12 pozwalają przekształcać wszelkie twierdzenia mające postać implikacji na równoważności. Obie one odpowiadają sobie dualnie.

226,13 EpApKpq

226,14 EpKpApq

a) prawa absorbcji;

b) p lub łącznie p i q zawsze i tylko, jeżeli p; p i alternatywnie p lub q zawsze i tylko, jeżeli p;

d) p zawsze i tylko, jeżeli p lub łącznie p i cokolwiek, oraz zawsze i tylko, jeżeli p i alternatywnie p lub cokolwiek;

e) obie tezy odpowiadają sobie dualnie i dają dyrektywy wtórne, pozwalające bądź zredukować wyrażenia postaci „ApKpq" oraz „KpApq" do „p", bądź rozwinąć „p" na wymienione wyrażenia.

1 = 1 + 1.0
0 = 0 + 0.1
1 = 1(1+0)
0 = 0(0+1)

226,15 EpAKpqKpNq

a) prawo rozwinięcia zdania;

b) p zawsze i tylko, jeżeli p i q lub p i nie q;

d) jest czwartek zawsze i tylko, jeżeli jest czwartek i święto lub czwartek i dzień powszedni,

e) prawo rozwinięcia zdania pozwala rozwinąć każde zdanie na alternatywę wyłączających się przypadków. Takie rozwinięcie jest niejednokrotnie dogodne, np. przy dowodach twierdzeń ogólnych, gdy rozróżniamy różne przypadki podpadające pod dane twierdzenie i przeprowadzamy dowód dla każdego z tych przypadków z osobna. Dowód tezy 226,15 przeprowadza się osobno dla każdej z obu składowych implikacji. Łącząc według prawa kompozycji 224,11 tezy Cpp i CpAqNq, otrzymujemy implikację CpAKpqKpNq. Połączenie zaś tez CKpqp i CKpNqp według prawa 223,13 daje CAKpqKpNqp.

226,16 $EApqAKpqAKpNqKNpq$

a) prawo rozwinięcia alternatywy;

c) alternatywa: p lub q — jest równoważna alternatywie trójczłonowej: Kpq lub $KpNq$ lub $KNpq$;

e) prawo rozwinięcia alternatywy pozwala przekształcić dowolną alternatywę, której człony nie wyłączają się, na alternatywę o członach wyłączających się (każde bowiem z wyrażeń Kpq, $KpNq$, $KNpq$ wyłącza się z dwoma innymi). Dowód tezy 226,16 otrzymuje się łącząc według tezy 223,13 tezę 226,15 i jej podstawienia dla p/q.

226,17 $EEpqAKpqKNpNq$

a) prawo równoważności;

b) p zawsze i tylko, jeżeli q: zawsze i tylko jeżeli p i q lub też nie-p i nie-q,

e) według tezy 226,17 zdaniami równoważnymi są dwa zdania zawsze i jedynie wtedy, gdy bądź oba są prawdziwe, bądź oba są fałszywe.

Rozdział 3. Dowodzenie tez teorii zdań

1. Dowody zupełne

Omawiając tezy teorii zdań w poprzednim rozdziale, zwracaliśmy w wielu miejscach uwagę na sposoby uzyskiwania tych tez i przekształcania ich za pomocą pierwotnych i wtórnych dyrektyw rozumowania. To uzyskiwanie i przekształcanie tez teorii zdań jest rozumowaniem, którego rezultatem jest uznanie nowej tezy. Wszelkie rozumowanie prowadzące do uznania nowej tezy w teorii zdań (bez względu na to, czy jest zarazem „odkrywaniem" tej tezy) będziemy w tym rozdziale nazywali krótko dowodzeniem lub dowodem.

Dowody, które szkicowaliśmy omawiając tezy teorii zdań, nie były wystarczająco opracowane z punktu widzenia wymagań dokładności w logice współczesnej. Poznamy przykłady dowodów odpowiadających tym wymaganiom, tzw. dowodów zupełnych, aby zdać sobie sprawę z tego, jakie są owe wymagania.

Zupełność dowodu polega na takim jego rozwinięciu, by żaden jego szczegół nie pozostał ukryty lub domyślny, lecz każdy był wyraźnie wypowiedziany celem stwierdzenia, na jakich zasadach i przesłankach opiera się dowód i jakie stosuje reguły rozumowania. Wolno nam mianowicie opierać się w dowodach w ogóle tylko na aksjomatach i tezach poprzednio udowodnionych; w dowodach zupełnych zaś stosuje się tylko pierwotne dyrektywy rozumowania: podstawianie, odrywanie i zastępowanie. Zastosowanie dyrektyw wtórnych odbiera dowodowi charakter zupełności.

Najprostszą formą dowodu jest zastosowanie do jakiejś tezy jednej z dyrektyw rozumowania; tak np. podstawiając w tezie Cpp — p/Np, dowodzimy

tezy *CNpNp* jako szczególnego przypadku tamtej tezy. Tego rodzaju dowody rzadko jedynie dają rezultaty godne uwagi i zwykle dowód składa się z kilku członów, z których każdy jest zastosowaniem dyrektyw rozumowania do tezy uzyskanej w członie poprzednim. W dowodach, które będziemy rozpatrywać, element dowodu składa się zazwyczaj z dwóch części: pierwsza z nich jest podstawianiem, druga — odrywaniem lub zastępowaniem. Całość dowodu jakiegoś twierdzenia może składać się z kilku takich elementów.

Weźmy pod uwagę element dowodu, w którym występuje podstawianie i odrywanie. Na tezie, która jest punktem wyjścia dowodu, dokonywamy podstawienia tak, aby otrzymać, jako jej szczególny przypadek (212), implikację pozwalającą na zastosowanie oderwania, tzn. posiadającą w poprzedniku uznaną poprzednio tezę logiki zdań. Oderwanie prowadzi do uznania następnika implikacji jako tezy udowodnionej. Odwołujemy się przeto do dwóch tez, z których każda pełni w dowodzie inną rolę; jedna służy do podstawienia (nazwijmy ją zasadą rozumowania), druga (niech nazywa się przesłanką) umożliwia oderwanie. Konstruując dowód szukamy przede wszystkim przesłanki i odpowiednio do niej dobieramy zasadę rozumowania. Ujmujemy to w słowach: z przesłanki według zasady rozumowania otrzymujemy tezę dowodzoną. Czasem wyrażamy się w ten sposób, że teza dowodzona jest przekształceniem przesłanki według zasady rozumowania. Tak np. tezę 221,4 otrzymujemy z tezy 221,3 według tezy 221,6 (prawa komutacji) jako zasady rozumowania: do tezy 221,6 trzeba zastosować podstawienie *p/Cpq*, *q/p*, *r/q*, aby otrzymać implikację, w której poprzedniku mamy tezę 221,3, w następniku 221,4.

Element dowodu, o jakim wyżej była mowa, przedstawiamy w postaci wiersza dowodowego. Odpowiednio do dwóch części elementu dowodu, także wiersz dowodowy składa się z dwóch części, które przedzielamy średnikiem. W pierwszej zaznaczamy podstawienie, w drugiej — oderwanie lub zastępowanie. W pierwszej części wiersza dowodowego podajemy najpierw numer zasady rozumowania, następnie zaznaczamy podstawienie; jeżeli w pewnym przypadku podstawienia nie ma, lecz oderwanie lub zastępowanie ma być dokonane wprost na którejś poprzednio uznanej tezie, to w pierwszej części wiersza dowodowego podajemy jedynie numer owej tezy. Jeżeli w drugiej części dowodu występuje oderwanie, druga część wiersza dowodowego rozpoczyna się od znaku „C", po tym znaku piszemy numer przesłanki (poprzednika implikacji), pauzę i numer, który nadajemy tezie dowodzonej (następnik implikacji). Jeżeli natomiast w drugiej części wiersza dowodowego mamy zaznaczyć zastępowanie, to czynimy to, podając rzymski numer dyrektywy zastępowania, pauzę i numer, który nadajemy tezie uznanej w wyniku zastępowania.

Powyższy opis uzupełnimy uwagami przy omawianiu poszczególnych przykładów.

Tezy należące do teorii zdań dzielą się na dwie grupy: do pierwszej należą aksjomaty, które uznajemy według dyrektyw aksjomatycznych, do drugiej — tezy pozostałe, które uznajemy według dyrektyw dedukcyjnych. Dyrektywy obu tych rodzajów są jedynymi elementami, które wnosimy do logiki spoza niej (mianowicie z metalogiki — 123). Dzięki temu zaś, że opieramy tezy logiki na owych dyrektywach, nie potrzebujemy odwoływać się do czynników innego rodzaju celem uznania tez za prawdziwe. Takim zaś czynnikiem jest sens wyrażeń, z których zdania są zbudowane; rozstrzygając według sensu wyrażeń, czy można uznać zdanie z nich zbudowane za prawdziwe, odwołujemy się do oczywistości treściowej jako kryterium prawdy; tezy oczywiste według sensu występujących w nich wyrażeń noszą nazwę p e w n i k ó w. Aksjomaty przyjęte według dyrektyw aksjomatycznych nie mają charakteru pewników, albowiem przy uznawaniu aksjomatów nie wchodzi w grę sens ich składników; przeciwnie, sens wchodzących w nie wyrażeń zostaje ustalony przez to, że zostały one uznane za aksjomaty (212). Także o uznaniu tez nie będących aksjomatami decydują dyrektywy rozumowania, nie zaś sens wyrazów występujących w owych tezach; także przeto w dowodach teorii zdań nie odwołujemy się do treści tez i oczywistości związków wynikania między nimi, lecz tylko do ich formy (postąci, kształtu), gdyż tylko o formie wyrażeń jest mowa w dyrektywach rozumowania; do formy zaś wyrażeń logiki należą te i tylko te ich własności, które są określone przez słownik i dyrektywy składni. Dowody potrafimy przeprowadzać stosując podstawienie, odrywanie i zastępowanie w sposób zupełnie mechaniczny; sens dokonywanych operacji i ich wyników uświadamiamy sobie dopiero później po ich dokonaniu, jako ich rezultat. Teoria, w której o uznaniu zarówno aksjomatów, jak też pochodnych rozstrzygamy wyłącznie według uprzednio sformułowanych dyrektyw sensu (aksjomatycznych i dedukcyjnych) i to dopiero decyduje o tym, jaki jest sens wyrażeń, nosi nazwę s y s t e m u s f o r m a l i z o w a n e g o; podobnie dowody postępujące wyłącznie według dyrektyw rozumowania, bez odwoływania się do jakiegoś przyjętego z góry sensu dokonywanych operacji i ich wyników, noszą nazwę d o w o d ó w s f o r m a l i z o w a n y c h. Takim systemem sformalizowanym jest teoria zdań w postaci współczesnej.

2. Przykłady dowodzenia

1,3 CCpqCpq
1,4 CpCCpqq
1,6 CCpCqrCqCpr

P r z y k ł a d 1. Dowód tezy 221,4. Wiersz dowodowy:

221,6 *p/Cpq, q/p, r/q; C* 221,3 — 221,4

Po wykonaniu wskazanego podstawienia otrzymujemy tezę: *CCCpqCpqCpCCpqq*, tj. implikację, której poprzednikiem jest wyrażenie *CCpqCpq*, czyli teza 221,3, a następnikiem wyrażenia *CpCCpqq*, czyli teza 221,4.

Przykład 2. Dowód tezy 222,6 ma podobną strukturę, jak przykład poprzedni. Wiersz dowodowy ma postać:

221,6 *q/Np, r/q; C* 222,5 — 222,6

Tezę 222,6 otrzymaliśmy z tezy 222,5 według prawa komutacji hipotez.

Przykład 3. Dowód tezy 222,4 jest bardziej skomplikowany. Dowód ten składa się z dwóch elementów (wierszy dowodowych), w wyniku pierwszego otrzymujemy tezę pomocniczą I, a dopiero drugi daje tezę 222,4:

221,7 *p/NNp, q/p, r/Np; C* 222,2 — I
I *CCpNpCNNpNp*
221,7 *p/CpNp, q/CNNpNp, r/Np; C* I — *C* 222,3 *p/Np* — 222,4
222,4 *CCpNpNp*

Teza I, którą uzyskaliśmy z tezy 222,2 (prawa podwójnego przeczenia) według tezy 221,7 (prawa sylogizmu) jako zasady rozumowania, głosi, że jeżeli *p* implikuje *Np*, to *NNp* implikuje *Np*. Z dwóch hipotez prawa sylogizmu oderwaliśmy tylko pierwszą (zazwyczaj, gdy rozumujemy według tego prawa, to dążymy do uznania konkluzji *Cpr* przez kolejne oderwanie obu hipotez *Cpq* i *Cqr*), dlatego teza I jest implikacją między dwiema implikacjami: *CpNp* i *CNNpNp*. W drugim wierszu dowodowym zasadą rozumowania jest również prawo sylogizmu, według którego rozumujemy z tez I i 222,3 (przy podstawieniu w niej *p/Np*) jako przesłanek. Odrywanie stosujemy dwukrotnie, odrywając kolejno obie te przesłanki. Myśl dowodu wyraża się słowami, jak następuje: Według tezy I: *CpNp* implikuje *CNNpNp*, według tezy 222,3 (z podstawieniem *p/Np*): *CNNpNp* implikuje *Np*, przeto *CpNp* implikuje *Np*, co należało udowodnić. Powiedzieliśmy wyżej (222,4), iż tezę 222,4 otrzymujemy z tezy 222,3 przez podstawienie *p/Np* i przy odwołaniu się do dyrektywy podwójnego przeczenia; jak widzimy ,obecnie w dowodzie zupełnym teza 222,3 i prawo podwójnego przeczenia występują jako przesłanki, zasadą rozumowania jest 221,7, dyrektywami zaś rozumowania są wyłącznie dyrektywy pierwotne podstawiania i odrywania.

Przykład 4. Dowód tezy 223,6:

221,7 *p/q, q/Apq, r/Apq; C* 223,2 *p/q, q/p* — *C* 223,4 *p/q, q/p* — 223,6
223,6 *CqApq*

Tezy 223,6 dowodzimy na podstawie tez 223,2 i 223,4 (prawo przemienności dla alternatywy), jako przesłanek, według prawa sylogizmu, jako zasady rozumowania.

Przykład 5

221,1 *p/CNpq*; I — 223,16
223,16 *CApqCNpq*

Przykład ten jest typowy dla wszystkich przypadków, w których dowodzimy, że wyrażenia równoznaczne ze sobą według jednej z dyrektyw zastępowania pozostają względem siebie w związku implikacyjnym.

Przykład 6

221,7 *p/Apq, q/CNpq, r/Cpqq*; C 223,16 — C 222,11 — 223,7
223,7 *CApqCCpqq*

Przykład 7

221,7 *p/Np, q/Cpq*; C 222,6 — 222,19
222,19 *CCCpqrCNpr*
221,7 *p/CCpqq, q/CNpq, r/Apq*; C 222,19 *r/q* — C 223,11 — 223,8
223,8 *CCCpqqApq*

Przykład 8

224,12 *p/Cpq, q/Cqr, r/Cpr*; C 221,7 — 224,14
224,14 *CKCpqCqrCpr*

Tezę 221,7 (prawo sylogizmu) przekształciliśmy według prawa włączania, nadając jej postać koniunkcyjną.

Przykład 9. Dowód tezy 224,42

221,7 *q/NNp, r/Nq*; C 222,1 — II
II *CCNNpNqCpNq*

W sposób podobny, jak przy tezie I, udowodniliśmy na podstawie tezy 222,1 (prawa podwójnego przeczenia) tezę pomocniczą II: jeżeli *NNp* implikuje *Nq*, to *p* implikuje *Nq*.

221,7 *p/ANpNq, q/CNNpNq, r/CpNq*; C 223,16 *p/Np, q/Nq* —
C II — III
III *CANpNqCpNq*

Tezę 223,16 z podstawieniem *p/Np, q/Nq* przekształciliśmy według prawa sylogizmu za pomocą tezy pomocniczej II na tezę pomocniczą III, zmieniając następnik tezy wyżej wspomnianej *CNNpNq* na *CpNq* (por. 221,7 e).

222,17 *p/ANpNq, q/CpNq*; C III — IV
IV *CNCpNqNANpNq*

Tezę III przekształciliśmy według prawa transpozycji na tezę pomocniczą IV,

IV; II — 224,42

224,42 CKpqNANpNq

Tezę IV przekształciliśmy za pomocą II dyrektywy zastępowania (212) otrzymując tezę 224,42. Całkowity dowód składa się w tym przykładzie z czterech wierszy dowodowych.

Przykład 10. Dowód tezy 224,43 (odwrotnej względem 224,42)

221,7 p/NNp, q/p, r/Nq; C 222,2 — V

V CCpNqCNNpNq

pomocnicza teza V jest odwrotna względem tezy II z przykładu poprzedniego;

221,7 p/CpNq, q/CNNpNq, r/ANpNq; C V — C 223,17 p/Np, q/Nq — VI

VI CCpNqANpNq

Tezę 223,17 z podstawieniem p/Np, q/Nq przekształciliśmy z pomocą tezy V zmieniając poprzednik CNNpNq na CpNq.

222,7 p/CpNq, q/ANpNq; C VI — VII

VII CNANpNqNCpNq

VII; II — 224,43

224,43 CNANpNqKpq

Pomocniczą tezę VII przekształciliśmy przy pomocy II dyrektywy zastępowania na tezę 224,43.

Przykład 11

226,1 p/NCCpqNCqp; IV — II p/Cpq, q/Cpq — 226,8

226,8 EEpqKCpqCqp

teza 226,8 stwierdza równoważność między wyrażeniami Epq i KCpqCqp, łączy przeto tezy 226,6 i 226,7; otrzymujemy ją z tezy 226,1 przy podstawieniu p/NCCpqNCqp, zastępując wyrażenie podstawione raz według IV dyrektywy zastępowania przez „Epq“, a drugi raz według II dyrektywy zastępowania — przy podstawieniu p/Cpq, q/Cqp — przez „KCpqCqp“.

Przykład 12

221,7 q/CNpq; C 222,5 — VIII

VIII. CCCNpqrCpr

VIII q/p, r/p; C 222,3 — 221,1

221,1 Cpp

Teza 221,1 została udowodniona z powołaniem się na trzy aksjomaty układu implikacyjno-negacyjnego, za pomocą tezy pomocniczej VIII, która przechodzi w 223,11 przez zastosowanie I dyrektywy zastępowania.

Dalsze przykłady dowodów otrzyma Czytelnik, przerabiając na dowody zupełne według powyższych wzorów, wskazówki o związkach inferencyjnych między tezami, wymienione w rubryce e) objaśnień przy poszczególnych tezach.

Rozdział 4. Matryce

1. Własności matrycowe funkcji prawdziwościowych

Omawialiśmy funkcje prawdziwościowe (211) jako związki międzyzdaniowe, których wartość logiczna zależy od wartości logicznej argumentów. Terminy „wartość logiczna", „prawda" lub „zdanie prawdziwe", „fałsz" lub „zdanie fałszywe", którymi operowaliśmy wówczas, należą do języka metalogiki (są bowiem terminami, w których opisujemy zdania), toteż w tezach i dowodach teorii zdań nie spotkaliśmy się z nimi. Powracając do rozważań metalogicznych stawiamy sobie obecnie za zadanie zbadać z oparciem się o tezy teorii zdań własności funkcyj prawdziwościowych *Cpq*, *Np*, *Apq*, *Kpq*, *Dpq*, *Epq* i innych, objawiające się w zależności ich wartości logicznej od wartości ich argumentów.

Wprowadzamy skróty: „*v*" *(verum)* zamiast „prawda" i „*f*" *(falsum)* zamiast „fałsz". Zdania „*p* = *v*", „*q* = *f*" czytamy „*p* jest prawdą", „*q* jest fałszem"; są to zdania metalogiczne, będące tłumaczeniami na język metalogiki asercji zdania *p* lub negacji zdania *q*. Wyrażenia „*Fvv*", „*Fvf*" itp. są zdaniami otrzymanymi z funkcji *Fpq* przez podstawienie w miejsce zmiennych *p*, *q*, odpowiednio wartości *v* lub *f*; przy tym dla funkcji jednego argumentu istnieją dwa różne przypadki *Fv*, *Ff*, dla funkcji zaś dwóch argumentów cztery różne przypadki *Fvv*, *Fvf*, *Ffv*, *Fff*. „*Fvv* = *v*" znaczy tyle, co „*Fvv*" jest prawdziwe", „*Fvf* = *f*" znaczy tyle, co „*Fvf*" jest fałszywe itp.

Cpq według tezy 221,1 uznajemy za zdanie prawdziwe w przypadkach *Cvv* i *Cff*, *Cvv* = *v* oraz *Cff* = *v*. Według tezy 221,2, gdy założymy, że *q* jest zdaniem prawdziwym i zastosujemy dyrektywę odrywania, *Cpq* uznajemy za zdanie prawdziwe w przypadkach *Cvv* (który dała nam już poprzednia teza) oraz *Cfv* (są to bowiem dwa przypadki, w których *q* jest zdaniem prawdziwym). Aby wreszcie uzyskać wartość dla *Cvf*, odwołujemy się do tezy 222,13: jeżeli poprzednik prawdziwy, a następnik fałszywy, to implikacja fałszywa. Należy przeto napisać: *Cvf* = *f*.

1,2 CqCpq
2,13 CpCNqNCpq

Ujmujemy te wyniki w tablicy składającej się z trzech kolumn: w kolejnych wierszach pierwszej i drugiej wypisujemy wartości argumentu *p* i argumentu *q*, w trzeciej odpowiednie wartości funkcji *Cpq*. Tablica taka nazywa się **matrycą** dla funkcji *Cpq*:

241,1

p	*q*	*Cpq*
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

Cpq p \ q	v	f
v	v	f
f	v	v

Matryca dla *Np* składa się z dwóch kolumn: w pierwszej wypisujemy wartości argumentu, w drugiej w odnośnych wierszach odpowiednie wartości funkcji. Aby je znaleźć, trzeba wziąć pod uwagę tezy 222,3 i 222,5; są to dwa zawierające funktor „*N*“ aksjomaty systemu implikacyjno-negacyjnego. Załóżmy, że w tezie 222,3 *p* ma wartość *f*; wobec tego także *CNff* = *f* (inaczej bowiem teza 222,3 musiałaby stać się fałszywa), to zaś możliwe jest tylko, jeżeli *Nf* = *v*. Załóżmy, że w tezie 222,5 argumenty przyjmują wartości *p* = *v*, *q* = *f*, stosując odrywanie przyjmujemy *CNvf* = *v*, to zaś zachodzi jedynie pod warunkiem, że *Nv* = *f*. Matryca dla „*Np*“ jest przeto następująca:

241,2

p	*Np*
v	*f*
f	*v*

Matrycę dla *Apq* obliczamy z definicji 212 — I „*Apq*“ = „*CNpq*“

241,3

p	*q*	*Apq*
v	*v*	*v*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*f*

Podobnie z definicyj (212) otrzymamy matryce dla pozostałych funkcji:

„*Kpq*“ = „*NCpNq*“

241,4

p	*q*	*Kpq*
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*f*

„*Dpq*“ = „*ANpNq*“

241,5

p	*q*	*Dpq*
v	*v*	*f*
v	*f*	*v*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

„*Epq*“ = „*NCCpqNCqp*“

241,6

p	*q*	*Epq*
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*f*
f	*f*	*v*

Każda z funkcji prawdziwościowych, o których mówiliśmy dotychczas, posiada charakterystyczną dla siebie matrycę, różną od matrycy dla każdej innej spomiędzy tych funkcji. Odwracając tę zależność załóżmy, że do każdej matrycy należy pewna scharakteryzowana przez nią funkcja prawdziwościowa, że zatem rozróżniamy tyle funkcji prawdziwościowych, ile jest różnych od siebie matryc. Łatwo obliczyć, uwzględniając wszystkie możliwe zestawienia wartości funkcji z wartościami argumentów, że dla funkcji jednego argumentu zbudować można 4 różne matryce, dla funkcji dwóch argumentów 16.

Matryce dla funkcji jednego argumentu (w kolumnie pierwszej są wypisane wartości argumentu, w dalszych kolejno odpowiednie wartości funkcji, które oznaczamy „$F_1 p$", „$F_2 p$", „$F_3 p$", „$F_4 p$".

241,7

p	$F_1 p$	$F_2 p$	$F_3 p$	$F_4 p$
v	v	f	v	f
f	f	v	v	f

$F_1 p$ jest asercją p (211)
$F_2 p$ jest negacją p (211)
$F_3 p$ jest funkcją, której różnymi postaciami są tezy 221,1, 222,1, 222,2 222,3, 222,4, 223,1, 223,3 i inne zawierające jeden tylko argument.
$F_4 p$ jest negacją funkcji $F_3 p$.

Matryce dla funkcji dwóch argumentów (w kolumnach pierwszej i drugiej podane są wartości argumentów p, q, w dalszych kolejno odpowiednie wartości funkcji: G_1pq, ... $G_{16}pq$; przy każdej funkcji podane jest nadto wyrażenie, którego wartość logiczna jest dla wszelkich wartości argumentów identyczna z wartością tej funkcji).

p	q	G_1pq $ApNp$	G_2pq Apq	G_3pq $CNpNq$	G_4pq Cpq	G_5pq Dpq	G_6pq p	G_7pq q	G_8pq $NEpq$
v	v	v	v	v	v	f	v	v	f
v	f	v	v	v	f	v	v	f	v
f	v	v	v	f	v	v	f	v	v
f	f	v	f	v	v	v	f	f	f

G_9pq Epq	$G_{10}pq$ Nq	$G_{11}pq$ Np	$G_{12}pq$ Kpq	$G_{13}pq$ $NCpq$	$G_{14}pq$ $NCNpNq$	$G_{15}pq$ $NApq$	$G_{16}pq$ $NApNp$
v	f	f	v	f	f	f	f
f	v	f	f	v	f	f	f
f	f	v	f	f	v	f	f
v	v	v	f	f	f	v	f

Funkcje G_4pq, G_2pq, $G_{12}pq$, G_5pq, G_9pq, są nam już znane jako Cpq, Apq, Kpq, Dpq, Epq; funkcje G_6pq, G_7pq, $G_{10}pq$, $G_{11}pq$, przybierają wartości identyczne z jednym z argumentów lub jego negacją, niezależnie od wartości drugiego argumentu. Są więc równoważne z funkcjami F_1p, F_1q, F_2q, F_2p.

Funkcje $G_{15}pq$ oraz G_5pq (czyli Dpq) są jedynymi funkcjami prawdziwościowymi posiadającymi tę własność, iż każda z nich może być jedynym wyrazem pierwotnym teorii zdań. Albowiem tezy 225,7 i 225,8 pozwalają zastąpić „Np" przez „Dpp", a tezy 225,9 oraz 225,10 pozwalają zastąpić „Cpq" przez „$DpDqq$"; podobną zaś własność posiada także jeszcze tylko funkcja $G_{15}pq$, czyli Hpq: „Np" można zastąpić przez „Hpp", a „Cpq" przez „$HHHppqHHppq$", co łatwo sprawdzić porównując według matryc przebieg wartości tych wyrażeń dla kolejnych wartości ich argumentów.

Na szczególną uwagę zasługuje funkcja G_1pq. Jest to funkcja, która jest prawdziwa dla wszelkich wartości zmiennych p, q. Nazywa się ją wraz z F_3p, która ma analogiczną własność, f u n k c j ą t a u t o l o g i c z n ą lub t a u t o l o g i ą, ze względu na zmienne p, q. Innymi słowy, przez tautologię ze względu na zmienne zdaniowe rozumie się funkcję prawdziwościową, której wartością jest v dla wszelkich wartości argumentów zdaniowych. Tautologie nie dają żadnej informacji o prawdziwości swoich argumentów, gdy natomiast np. z prawdziwości alternatywy można wnioskować, że prawdziwy jest przynajmniej jeden z jej członów. Wszystkie tezy logiki zdań są w tym sensie tautologiami. Negacją tautologii, czyli funkcją tautologicznie fałszywą, jest funkcja „$G_{16}pq$", które wartością jest f dla wszelkich wartości argumentów.

Twierdzenie, że wszystkie tezy logiki zdań są tautologiami, dostarcza metody sprawdzania, czy jakieś wyrażenie sensowne logiki zdań jest jej tezą (sprawdzanie matrycowe). Mianowicie należy z matryc obliczyć, jaka jest wartość tego wyrażenia dla wszelkich wartości argumentów; jeżeli wartością tą jest zawsze v, to badane wyrażenie jest tezą logiki zdań. Sprawdźmy np. w ten sposób tezy 226,9 i 226,10 (prawa absorbcji):

226,9 $EpApKpq$

226,10 $EpKpApq$

Sprawdzenie zapiszemy w skrótach (w wyrażeniach połączonych znakiem „=" idąc od strony lewej ku prawej zastępujemy kolejno ostatnie od końca funkcje przez ich wartości):

226,9 $EvAvKvv = EvAvv = Evv = v$

$EvAvKvf = EvAvf = Evv = v$

$EfAfKfv = EfAff = Eff = v$

$EfAfKff = FfAff = Eff = v$

$$
\begin{aligned}
226{,}10\qquad & EvKvAvv = EvKvv = Evv = v \\
& EvKvAvf = EvKvv = Evv = v \\
& EfKfAfv = EfKfv = Eff = v \\
& EfKfAff = EfKff = Eff = v
\end{aligned}
$$

2. Logiki wielowartościowe Łukasiewicza i Brouwera

Układając matryce dla funkcji prawdziwościowych, wyszliśmy z założenia, iż istnieją dwie wartości logiczne, prawda i fałsz. Założenie to, zwane zasadą dwuwartościowości, charakteryzuje logikę dwuwartościową (211). Pewne rozważania prowadzą do zastąpienia zasady dwuwartościowości przez inne założenia dotyczące wartości logicznych. Otrzymujemy wtedy w miejsce logiki dwuwartościowej inne systemy logiczne, scharakteryzowane przez inne matryce dla funkcji prawdziwościowych.

Jeden z tych systemów, opracowany przez J. Łukasiewicza, wychodzi od rozważań dotyczących modalności zdań. Zdaniami modalnymi nazywamy zdania postaci *„jest konieczne, że p"*, *„jest możliwe, że p"* i ich zaprzeczenia, przy czym *„nie jest konieczne, że p"* jest równoważne ze zdaniem *„jest możliwe, że nie p"*, zaś *„nie jest możliwe, że p"* jest równoważne ze zdaniem *„jest konieczne, że nie p"* („*p*" jest zmienną zdaniową). Powstaje wątpliwość co do wartości logicznej zdań *p*, dla których prawdziwe jest zdanie modalne *„jest możliwe, że p"*, jeżeli zdania te dotyczą faktów możliwych w przyszłości. Co jest bowiem możliwe w przyszłości, to może zdarzyć się, lecz także może nie zdarzyć się. Dla zdań takich obowiązuje przeto prawo w postaci koniunkcji: *„Możliwe, że p, i możliwe, że nie p"*. Gdyby zdanie *p* było z góry prawdziwe, to nie byłby prawdziwy drugi człon koniunkcji, tj. zdanie *„możliwe, że nie p"*; gdyby natomiast było ono z góry fałszywe, to nie byłby prawdziwy pierwszy człon koniukcji: *„możliwe, że p"*. Obie zatem wartości *p* prowadzą do fałszywości koniunkcji. Chcąc ją zachować, trzeba założyć, że oprócz zdań prawdziwych i fałszywych istnieją zdania o trzeciej wartości logicznej, mianowicie zdania dotyczące możliwości.

W myśl takich rozważań powstaje trójwartościowa logika możliwości, oparta na założeniu, iż istnieją trzy wartości logiczne: prawda, fałsz i możliwość (termin „możliwość" jest tu użyty w znaczeniu przenośnym, w znaczeniu pierwotnym bowiem możliwe jest to, o czym w zdaniu mowa, nie zaś zdanie). Matryce funkcji prawdziwościowych dla owych wartości logicznych są określone, jak następuje:

Dla wartości argumentów *v* i *f* matryce pozostają takie same, jak w logice dwuwartościowej, tak iż należy je tylko uzupełnić wartościami dla możliwości (*m*):

Matryca dla Np:

242,1

p	Np
v	f
f	v
m	m

Matryca dla Cpq: (wartości dla p na lewo, dla q u góry) 242,2

$p \backslash q$	v	f	m
v	v	f	m
f	v	v	v
m	v	m	v

Matryca dla Apq: (według definicji „Apq" = „$CCpqq$", por. tezy 223,7 i 223, 8

242,3

$p \backslash q$	v	f	m
v	v	v	v
f	v	f	m
m	v	m	m

Matryca dla Kpq: (według definicji „Kpq" = $NANpNq$" = „$NCCNpNqNq$", por. tezy 224,43 i 224,42)

242,4

$p \backslash q$	v	f	m
v	v	f	m
f	f	f	f
m	m	f	m

Tezami trójwartościowej logiki możliwości są, podobnie jak w logice dwuwartościowej, jedynie funkcje tautologiczne, a zatem spomiędzy tez logiki dwuwartościowej tylko te pozostają tezami trójwartościowej logiki możliwości, które według matryc pozostają prawdziwe także wtedy, gdy wartością argumentów jest możliwość. Między innymi następujące tezy logiki dwuwartościowej nie są tezami trójwartościowej logiki możliwości:

222,3	$CCNppp$,	albowiem $CCNmmm = m$
222,4	$CCpNpNp$,	albowiem $CCmNmNm = m$
222,12	$CCpqCCpNqNp$,	albowiem $CCmmCCmNmNm = CvCvm = m$
222,13	$ApNp$,	albowiem $AmNm = m$
224,23	$NKpNp$,	albowiem $NKmKm = m$

W logice dwuwartościowej wyrażenia Apq, $CNpq$, $CCpqq$ są równoważne sobie (według tez 223,7, 223,8, 223,17, 223,18), dzięki czemu można Apq zdefiniować bądź przez $CNpq$, bądź przez $CCpqq$. W logice możliwości równoważność ta nie istnieje, gdyż $CNmm = v$, natomiast $CCmmm = m$. Trzeba więc wybrać między dwoma sposobami definicja alternatywy, a także koniunkcji, którą zdefiniowaliśmy przy pomocy alternatywy. Jeżeli, jak zo-

stało wyżej podane, definiujemy alternatywę przez $CCpqq$, to zachowujemy w logice trójwartościowej prawa tautologii dla alternatywy $EAppp$ (tezy 223,1 i 223,3) i dla koniunkcji $EKppp$ (tezy 224,1 i 224,3), natomiast odrzucamy (jak okazało się wyżej) prawa sprzeczności i wyłączonego środka (tezy 224,23 i 222,13). Jeżelibyśmy jednak zdefiniowali alternatywę i koniunkcję przyjmując do tego celu $CNpq$ zamiast $CCpqq$, to musielibyśmy zmienić matryce dla Apq i Kpq w myśl związków $Amm = v$, $Kmm = f$, w następstwie czego mielibyśmy dla praw tautologii $CAmmm = m$, $CmKmm = m$, dla prawa wyłączonego środka $AmNm = v$, dla prawa sprzeczności $NKmNm = v$, tzn. odpadają prawa tautologii, natomiast pozostają prawa wyłączonego środka i sprzeczności. Rozważanie to okazuje, że prawa sprzeczności i wyłączonego środka nie są związane z zasadą dwuwartościowości w ten sposób, by jej odrzucenie pociągało za sobą także ich nieważność, mimo że przy nieścisłym sposobie wyrażenia się można te prawa uważać za równoważne z zasadą dwuwartościowości.

Termin „możliwy" występuje w rozważaniach Arystotelesa dotyczących modalności zdań w dwóch znaczeniach. W znaczeniu węższym możliwe jest to i tylko to, co nie jest konieczne i nie jest niemożliwe; w tym znaczeniu zawsze i tylko jeżeli możliwe, że p, to zarazem możliwe, że nie p. W znaczeniu szerszym możliwość przeciwstawia się tylko niemożliwości, możliwe jest bowiem zarówno to, co konieczne, jak i to, co będąc możliwe jest niekonieczne; w tym znaczeniu, jeżeli nie jest możliwe, że p, to możliwe, że nie p.

Stosunki te unaocznia poniższy wykres:

	p	
K	*M*	*N*
N	*M*	*K*
	nie *p*	

K — konieczne, *M* — możliwe, *N* — niemożliwe. W węższym znaczeniu możliwości, gdy p konieczne (*K*), to nie p jest niemożliwe (*N*), gdy p możliwe (*M*), to możliwe (*M*) także nie-p, gdy p niemożliwe (*N*), to nie-p konieczne (*K*) — i na odwrót. W szerszym znaczeniu możliwości możliwość obejmuje łącznie działki *K* i *M*. Zatem, gdy p możliwe (*K* lub *M*), to nie p jest niemożliwe lub możliwe (*N* lub *M*), gdy zaś nie p możliwe (*M* lub *K*), to p możliwe lub niemożliwe (*M* lub *N*).

Wykres poucza, że przy węższym znaczeniu możliwości zdania p i nie p, jeżeli oba są możliwe, nie spełniają ani zasady sprzeczności, ani zasady wyłączonego środka, gdyż a) może być fałszem zarówno „możliwe, że p", jak i „możliwe, że nie p" (mianowicie gdy p konieczne, a nie p niemożliwe lub p niemożliwe, a nie p konieczne); b) może być prawdą „możliwe, że p" i wtedy prawdą jest też „możliwe, że nie p". W szerszym znaczeniu możliwości, dla zdań takich zachowana jest zasada wyłączonego środka, jeżeli bowiem zdanie „możliwe,

że p" jest fałszywe (tzn. w działce N dla p), zdanie „możliwe, że nie p" jest prawdziwe, gdyż działka K dla „nie p" leży w zakresie jego możliwości; analogicznie, jeżeli zdanie „możliwe, że nie-p" jest fałszywe, to zdanie „możliwe, że p" jest prawdziwe.

Trójwartościowa logika Łukasiewicza w ujęciu, w którym odrzuca zasadę wyłączonego środka i zasadę sprzeczności, odpowiada możliwości w znaczeniu węższym, w drugim ujęciu, w którym obie zasady zachowuje, nie zgadza się z żadną z arystotelesowskich interpretacji możliwości.

Inną postacią logiki trójwartościowej jest logika intuicjonistyczna, stworzona przez matematyków holenderskich L. E. J. Brouwera i A. Heytinga w związku z badaniami nad zagadnieniem istnienia przedmiotów matematyki.

Istnienie w matematyce związane jest z niesprzecznością w ten sposób, że gdy mamy wykazać, iż jakiś przedmiot matematyczny, jakaś liczba, jakiś zbiór, nie istnieje, to dzieje się to przez wykazanie, że byłby on sprzeczny. Gdy sprzeczny, to nie istnieje, ale czy istnieje, gdy niesprzeczny?

Na tak postawione pytanie odpowiadają jedni, zwani idealistami lub formalistami (Hilbert), twierdząco, głosząc tezę, iż jeżeli wykażemy, że jakieś określenie nie zawiera sprzeczności, to wolno stwierdzić, że istnieją przedmioty matematyczne (liczby, zbiory), podpadające pod to określenie. Tak np. dowodzi się w matematycznej teorii zbiorów, że zbiór liczb rzeczywistych (obejmujący liczby wymierne i niewymierne) jest nieprzeliczalny, tzn. jest liczniejszy od zbioru liczb całkowitych. Lecz z drugiej strony dowodzi się, że zbiór liczb rzeczywistych, dla których można podać definicje i które można według tych definicji skonstruować, jest tylko przeliczalny (tak, jak zbiór liczb całkowitych), a więc nie wszystkie liczby dadzą się zdefiniować i według tych definicji skonstruować, czyli utworzyć. Mimo to — twierdzą formaliści — istnieją owe nie dające się skonstruować liczby rzeczywiste, bo istnienie ich jest zagwarantowane niesprzeczną definicją nieprzeliczalnego zbioru liczb rzeczywistych.

Przeciwnicy formalizmu zajmują stanowisko bądź bardziej skrajne, bądź bardziej umiarkowane. Kierunek skrajny bywa nazywany empiryzmem lub pragmatyzmem, kierunkiem umiarkowanym jest intuicjonizm. Empirycy (H. Poincaré) zaprzeczają, jakoby wykazanie niesprzeczności definicji było równoważne z wykazaniem fałszywości twierdzenia, że przedmiot definiowany nie istnieje, i zarazem dowodem twierdzenia, że ów przedmiot istnieje. Niesprzeczność definicji jest warunkiem koniecznym przedmiotu definiowanego, nie jest jednak warunkiem wystarczającym. Aby wykazać, że przedmiot istnieje, trzeba go skonstruować; a więc — w podanym wyżej przykładzie — tylko wtedy wolno nam stwierdzić, że jakaś liczba rzeczywista istnieje, jeżeli znamy przepis obliczenia jej z dowolną dokładnością.

Intuicjonizm przyjmuje, że jeżeli przedmiot niesprzeczny, to nieprawda, że nie istnieje; jednakże odrzuca zdanie, że jeżeli nieprawda, że coś nie istnieje, to owo coś istnieje. Wykazanie niesprzeczności definicji pozwala nam przeto

odrzucić twierdzenie, że przedmiot nie istnieje. Jeżeli jednak nie potrafimy przedmiotu skonstruować, pozostaje istnienie jego niejako w stanie zawieszenia. Intuicjonizm rozróżnia przeto dwa przypadki, które empiryzm matematyczny traktuje jednakowo. Dla empiryzmu przedmiot nie istnieje, jeżeli nie został skonstruowany, zarówno w przypadku sprzeczności, jak niesprzeczności definicji. Dla intuicjonizmu nie istnieje przedmiot sprzeczny, natomiast przedmiot niesprzeczny, jeżeli nie może być skonstruowany, jest niezdeterminowany w tym sensie, że nieprawdą jest zarówno, że nie istnieje, jak też, że istnieje. Zarazem zaś owo niezdeterminowanie jest jakby bliższe istnienia niż nieistnienia wobec tego, że może przejść w istnienie (przez skonstruowanie przedmiotu), lecz nie może przejść w nieistnienie, bo nie istnieją tylko przedmioty, których definicje zawierają sprzeczność. Ten ostatni moment różni intuicjonizm od stanowiska logiki możliwości, omawianej poprzednio, w której możliwość może przejść zarówno w istnienie, jak w nieistnienie.

Stosownie do powyższych rozważań muszą być ustalone matryce dla funkcji prawdziwościowych. Podstawowym założeniem intuicjonizmu jest odrzucenie odwrotnej zasady podwójnego przeczenia (teza *222,2*: nie jest prawdą, że jeżeli nieprawda, że nieprawda, że *p*, to *p*). Pozostaje to bowiem w bezpośrednim związku z kwestią istnienia: niech „*p*" znaczy „*A* istnieje" — nie wystarcza, zdaniem intuicjonizmu, dowieść, że zdanie *Np*, czyli „*A* nie istnieje", jest fałszywe (dowód taki dzieje się przez okazanie, iż zdanie *p* nie zawiera sprzeczności), aby uznać prawdziwość *p*. Gdy *Np* fałszywe, *NNp* prawdziwe; nie wynika stąd jednak, że *p* prawdziwe — *p* posiada trzecią wartość logiczną, różną zarówno od wartości *Np*, jak od wartości *NNp*. Jednakowoż jest ta trzecia wartość niejako bliższa prawdy niż fałszu, bo może zamienić się w prawdę (gdy mianowicie potrafimy pozytywnie dowieść zdania *p* — np. przez konstrukcję przedmiotu A, jeżeli *p* znaczy „*A* istnieje"), nigdy zaś nie zamienia się w fałsz. Tak przeto matryca dla negacji ma postać następującą (symbole „*v*" i „*f*" mają to samo znaczenie, co poprzednio, „*n*" oznacza trzecią wartość):

242,5 *Np*

p	*Np*
v	*f*
f	*v*
n	*f*

tzn. *Nv* i *Nf* nie różnią się od tychże wartości dla logiki dwuwartościowej, *Nn* jest takie, jak *Nv*.

Matryca implikacji dla wartości argumentów *v* i *f* nie różni się od matrycy w logice dwuwartościowej. Jeżeli *n* występuje w poprzedniku implikacji, której następnikiem jest *f*, to implikacja przybiera wartość *f* (bo *n* bliższe prawdy niż

fałszu); gdy *n* jest następnikiem przy poprzedniku *v*, implikacja ma wartość *n*. Oto omawiana matryca:

242,6 *Cpq*:

p \ q	v	f	n
v	v	f	n
f	v	v	v
n	v	f	v

Funkcje *Apq* oraz *Kpq* w logice intuicjonistycznej są terminami pierwotnymi, wprowadzonymi przez aksjomaty, podobnie jak *Np* i *Cpq*, matryce dla nich mają postać następującą:

242,7 *Apq*

	v	f	n
v	v	v	v
f	v	f	n
n	v	n	n

242,8 *Kpq*

	v	f	n
v	v	f	n
f	f	f	f
n	n	f	n

Następujące prawidła ujmują związki między prawdziwością zdań w logice klasycznej i intuicjonistycznej:

Jeżeli w logice klasycznej zdanie *p* jest prawdziwe, to w logice intuicjonistycznej *p* nie jest fałszywe (czyli ma wartość *v* albo *n*).

Jeżeli zdanie *q* jest w logice klasycznej fałszywe, to jest fałszywe także w logice intuicjonistycznej.

Między innymi następujące tezy logiki zdań nie są prawdziwe w logice intuicjonistycznej:

222,2 *CNNpp*, albowiem *CNNnn* = *CNfn* = *Cvn* = *n*,
223,8 *CCCpqqApq*, albowiem *CCCnffAnf* = *CCffn* = *Cvn* = *n*,

wobec powyższego nie można definiować *Apq* przez *CCpqq*, jak w trójwartościowej logice możliwości. Teza 223,7 odwrotna do 223,8 jest prawdziwa także w logice intuicjonistycznej.

223,15 *ApNp*, albowiem *AnNn* = *Anf* = *n*,
223,17 *CCNpqApq*, albowiem *CCNnnAnn* = *Cvn* = *n*,

nie można przeto definiować *Apq* przez *CNpq*; teza odwrotna 223,16 pozostaje prawdziwa.

223,18 *CCpqANpq*, albowiem *CCnnANnn* = *CvAfn* = *Cvn* = *n*, odwrotna teza 223,19 jest prawdziwa.

224,25 *CNCpNqKpq*, albowiem *CNCvNnKvn* = *Cvn* = *n*, nie można przeto definiować *Kpq* przez *NCpNq*. Teza odwrotna 224,24 pozostaje prawdziwa.

224,43 *CNANpNqKpq*, albowiem *CNANnNnKnn* = *CNAffn* = = *Cvn* = *n*, nie można przeto definiować *Kpq* przez *NANpNq*; teza odwrotna 224,42 pozostaje prawdziwa.

Oba systemy trójwartościowej logiki zdań, scharakteryzowane powyżej za pomocą matryc, tzn. w obrębie rozważań metalogicznych, dają się skonstruować w obrębie samej logiki jako systemy sformalizowane, oparte na aksjomatach i dyrektywach rozumowania. Dla trójwartościowej logiki możliwośc układ aksjomatów składa się z tez następujących:

1. *CqCpq*
2. *CCpqCCqrCpr*
3. *CCCpNppp*
4. *CCNqNpCpq*

Aksjomaty 1, 2, 4 znamy jako tezy 221,2, 221,7 222,10
Aksjomat 3 jest modyfikacją tezy 222,3, która sama, jak wiemy, nie jest tautologicznie prawdziwa w logice możliwości.

Układ aksjomatów logiki intuicjonistycznej podany przez Heytinga jest bardziej skomplikowany. Tworzą go tezy, które przytoczyliśmy w logice zdań jako 224,1, 224,4, 224,9, 224,14 221,2, 224,13, 223,2, 223,4, 224,17, 222,6, 224,16. Dyrektywy rozumowania są sformułowane nieco inaczej, niż to uczyniliśmy w logice zdań.

Inny przejrzysty układ aksjomatów, równoważny układowi Heytinga podał Łukasiewicz; układ jego jest następujący:

I. 1. *CpCqp*
2. *CCpCCpqCpq*
3. *CCpqCCqrCpr*

II. 4. *CKpqp*
5. *CKpqq*
6. *CCpqCCprCpKqr*

III. 7. *CpApq*
8. *CqApq*
9. *CCprCCqrCApqr*

IV. 10. *CCpNqCqNp*
11. *CNpCpq*

Do układu należą dwie dyrektywy rozumowania, mianowicie zwykłe dyrektywy podstawiania i odrywania. Posiada on jeszcze tę szczególną własność, że zmienia się w zupełny układ aksjomatów dwuwartościowej teorii zdań przez dołączenie doń aksjomatu

12. *CCCpNpqCCpqq*

Systemy trójwartościowe dają się przekształcić na systemy logiki więcej wartościowej. Podane wyżej matryce logiki intuicjonistycznej są, jak okazały bardziej szczegółowe badania, tylko przybliżonymi matrycami dla systemu twierdzeń opartych na założeniach intuicjonizmu. Wprawdzie wszystkie tezy intuicjonistycznej teorii zdań są prawdziwe według tych matryc, lecz istnieją twierdzenia spełniające te matryce, a nie uznawane przez intuicjonistów. Taką jest teza *ACpqCqp* prawdziwa, jak łatwo sprawdzić, w logice dwuwartościowej i spełniająca także wyżej podane matryce logiki intuicjonistycznej. Można utworzyć matryce pięciowartościowe, które będą dokładniejszym przybliżeniem intuicjonizmu i które wykażą, że teza *ACpqCqp* nie jest intuicjonistyczna. Podstawą dla nich jest rozważanie następujące: Niech trzecią wartością prócz prawdy i fałszu będzie wartość zdania *p*, które stwierdza „*A* istnieje", nazwijmy ją „*a*". Negacja zdania *p* niech posiada wartość *b* różną również od prawdy i od fałszu, a wreszcie alternatywa *ApNp* również różna od prawdy, jak od fałszu, niech będzie piątą wartością *n*. Związki między tymi wartościami określają matryce:

p	*Np*
v	*f*
n	*f*
a	*b*
b	*a*
f	*v*

Cpq	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*
v	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*
n	*v*	*v*	*a*	*b*	*f*
a	*v*	*v*	*v*	*b*	*b*
b	*v*	*v*	*a*	*v*	*a*
f	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*

Apq	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*
v	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*
n	*v*	*n*	*n*	*n*	*n*
a	*v*	*n*	*a*	*n*	*a*
b	*v*	*n*	*n*	*b*	*b*
f	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*

Kpq	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*
v	*v*	*n*	*a*	*b*	*f*
n	*n*	*u*	*a*	*b*	*f*
a	*a*	*a*	*a*	*f*	*f*
b	*b*	*b*	*f*	*b*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*

Według tych matryc wszystkie tezy intuicjonizmu są prawdziwe, natomiast teza *ACpqCqp* otrzymuje wartość *ACabCba* = *Aba* = *n*. Zbiór tez prawdziwych według podanych matryc pięciowartościowych jest również obszerniejszy od logiki intuicjonistycznej. Znalezione przez Jaśkowskiego matryce adekwatne dla intuicjonistycznej teorii zdań, tzn. odpowiadające dokładnie aksjomatyce Heytinga, posiadają nieskończenie wiele wartości.

Rozważania dotyczące matryc dla funkcji prawdziwościowych pozwalają, jak widzieliśmy powyżej, na daleko sięgające uogólnienia logiki zdań przez tworzenie różnych systemów logiki wielowartościowej. Rozważania te nie są jedyną drogą wiodącą ku takiemu uogólnieniu. Inna jeszcze, ogólniejsza metoda tworzenia logiki wielowartościowej wychodzi od pojęcia prawdopodo-

bieństwa i przymuje, że prawda i fałsz są dwiema wartościami krańcowymi, między którymi mieszczą się jako wartości pośrednie różne wartości prawdopodobieństwa. Poznanie tej metody wymaga zaznajomienia się z zasadami logiki prawdopodobieństwa.

3. Matrycowa metoda badania niesprzeczności i niezależności aksjomatów

Metoda sprawdzania matrycowego posiada jeszcze jedno ważne zastosowanie, mianowicie jest narzędziem dla dowodzenia niesprzeczności i niezależności układu aksjomatów (212). Weźmy dla przykładu układ implikacyjno-negacyjny dwuwartościowej logiki zdań (212) składający się z trzech aksjomatów:

221,7 $CCpqCCqrCpr$
222,3 $CCNppp$
222,5 $CpCNpq$

Dowody polegają na tej myśli zasadniczej, że jeżeli układ aksjomatów jest ze względu na przyjęte matryce tautologicznie prawdziwy, to ta sama własność jest dziedziczna w danym systemie, tzn. przysługuje wszystkim wyrażeniom, które wynikają z owego układu przez zastosowanie przyjętych wraz z tym układem dyrektyw rozumowania.

Dowód niesprzeczności aksjomatów układu implikacyjno-negacyjnego powołuje się na to, że wszystkie jego aksjomaty są tautologicznie prawdziwe ze względu na matryce logiki dwuwartościowej i że jeżeli jakieś dwa wyrażenia są względem siebie sprzeczne, to nie mogą być oba tautologicznie prawdziwe ze względu na te matryce (bo według matrycy dla negacji $Nv = f$). Ponieważ zaś prawdziwość przechodzi dziedzicznie na wszystkie twierdzenia wynikające z aksjomatów według przyjętych dyrektyw rozumowania, przeto ani między aksjomatami, ani między innymi tezami logiki zdań nie mogą znaleźć się dwa zdania sprzeczne.

Dowód niezależności pewnego aksjomatu naszego układu od innych aksjomatów tego układu wymaga skonstruowania takich matryc dla implikacji i negacji, względem których ów jedynie aksjomat — przeciwnie niż wszystkie inne — nie byłby tautologicznie prawdziwy. Jeżeli zaś wszystkie tezy wynikające z aksjomatów tautologicznie prawdziwych przy danych matrycach ową prawdziwość dziedzicznie posiadają, odpowiedni zaś aksjomat jej nie posiada, przeto nie wynika on z pozostałych aksjomatów.

W myśl powyższego schematu dla wykazania niezależności aksjomatu 221,7 od pozostałych trzeba założyć następujące matryce trójwartościowe (wartości oznaczamy literami v, f, t):

Np:

v	f	t
f	v	t

Cpq:

	v	f	t
v	v	f	f
f	v	v	v
t	v	v	f

Aksjomaty 222,3 i 222,5 pozostają prawdziwe przy wszelkich podstawieniach, aksjomat 221,7 — jeżeli argumentom p, q, r, nadamy odpowiednio wartości t, f, t, — otrzymuje wartość f: $CCtfCCftCtt = CvCvf = Cvf = f$.

Dla wykazania niezależności aksjomatu222, 3 od pozostałych przyjmuje się następujące matryce:

Np:

v	f
f	f

Cpq:

	v	f
v	v	f
f	v	v

Aksjomaty 221,7 i 222,5 pozostają tautologicznie prawdziwe, aksjomat 222,3 nie posiada tej własności, albowiem $CCNfff = Cvf = f$.

Wreszcie dla wykazania niezależności aksjomatu 222,5 od pozostałych służą matryce:

Np:

v	f
v	v

Cpq:

	v	f
v	v	f
f	v	v

przy których pozostają tautologicznie prawdziwe aksjomaty 221,7 i 222,3, aksjomat 222,5 natomiast jest fałszywy przy wartościach argmentów v, f, $CvCNvf = CvCvf = Cvf = f$.

Część 3

Teoria kwantyfikatorów

Rozdział 1. Teoria funkcji zdaniowych z kwantyfikatorami

1. Funkcje propozycjonalne — Generalizacja i specjalizacja

W logice zdań zajmowaliśmy się związkami międzyzdaniowymi, zdanie zaś proste (122) było elementem, którego budowy wewnętrznej nie braliśmy pod uwagę. Wiemy jednak, że zdanie proste atomowe ma swoistą strukturę, w skład której wchodzą nazwy i funktory zdaniotwórcze argumentów nazwowych (122). Niech wyrażenia „*fx*", „*gx*", „*hx*",... „*fxy*", „*gxy*", „*hxy*"... oznaczają funkcje zdaniowe argumentów nazwowych; „*f*", „*g*", „*h*"... są funktorami zdaniotwórczymi argumentów nazwowych; „*x*", „*y*"... są zmiennymi nazwowymi. Symboli „*a*", „*b*", „*c*"... używać będziemy jako nazw jakichkolwiek, lecz określonych; wyrażenie przeto *fx* jest funkcją propozycjonalną, natomiast *fa* jest zdaniem otrzymanym z funkcji *fx* przez podstawienie za zmienną jakiejkolwiek wartości *a*. W dalszym ciągu będziemy pisać krótko f u n k c j a p r o p o z y c j o n a l n a zamiast funkcja zdaniowa argumentów nazwowych. Funkcje propozycjonalne reprezentują zdania tak, jak zmienne zdaniowe. Funkcje prawdziwościowe funkcji propozycjonalnych są przeto wyrażeniami sensownymi teorii zdań, zarazem zaś są one — ze względu na występujące w nich zmienne nazwowe — funkcjami propozycjonalnymi, np. *Cfxgx*, *Nfxy* itp.

Funkcja propozycjonalna zamienia się w zdanie przez interpretację analogiczną, jak dla funkcji argumentów zdaniowych (212), tzn. przez zamianę w niej zmiennych nazwowych na nazwy. Jest to droga s p e c j a l i z a c j i. Ale także otrzymujemy zdania drogą g e n e r a l i z a c j i funkcji zdaniowych za pomocą k w a n t y f i k a t o r ó w. A mianowicie są zdaniami wyrażenia, które otrzymujemy poprzedzając funkcję zdaniową argumentu *x* zwrotem „dla każdego *x*" (lub obszerniej „dla każdej wartości *x* prawdą jest, że") albo „dla pewnego *x*" (lub obszerniej „dla pewnej wartości *x* prawdą jest, że) i analogicznie dla innych argumentów. Wyrażenia takie bowiem są prawdziwe lub fałszywe, np. fałszem jest: „dla każdego *x*: *x* jest zwierzęciem ssącym" natomiast prawdą jest: „dla pewnego *x*: *x* jest zwierzęciem ssącym". Symbol

nazywamy kwantyfikatorem ogólnym (generalizatorem), symbol zaś „(Ex)“ lub „(Ey)“ itp., który czytamy „dla pewnego x“, „dla pewnego y“ itp., nosi nazwę kwantyfikatora szczegółowego (partykularyzatora). Kwantyfikator ogólny przekształca funkcję propozycjonalną na zdanie ogólne, kwantyfikator szczegółowy zaś przekształca ją na zdanie szczegółowe lub egzystencjalne, gdyż wyrażenie „dla pewnego $x : fx$“ uważamy za równoznaczne z wyrażeniem „dla niektórych $x : fx$“ lub „istnieją takie x, iż fx“. Kwantyfikator tworzy wyrażenie sensowne wraz z następującą po nim funkcją propozycjonalną, np. „$(x)fx$“, „$(Ex)Nfxy$“, „$(x)(y)Afxygxy$“ itp. Kwantyfikatory nie są funktorami zdaniotwórczymi, jak symbole „C“, „N“ i inne, albowiem nie tworzą ze zmienną zdaniową (funkcją propozycjonalną) następującą po kwantyfikatorze funkcji zdaniowej, jak tamte, lecz zdanie o wszystkich lub pewnych indywiduach x, y..., tak iż tezy zbudowane z funkcji propozycjonalnych i kwantyfikatorów możemy interpretować z jednej strony jako tezy o własnościach tychże funkcji i kwantyfikatorów, z drugiej jednak strony także jako tezy charakteryzujące własności zbiorów indywiduów. W odróżnieniu od funktorów zdaniotwórczych nazywa się kwantyfikatory operatorami, tak jak matematyczne znaki sumy „Σ“, iloczynu „Π“ i całki „$\int$“. Wyrażenie opatrzone kwantyfikatorem, jako zdanie prawdziwe lub fałszywe, przestaje być funkcją występującej w nim a wyszczególnionej pod kwantyfikatorem zmiennej. Kwantyfikator wiąże zmienną: zmienna pod znakiem kwantyfikatora nazywa się zmienną związaną lub pozorną, w przeciwieństwie do zmiennej wolnej (lub rzeczywistej), tzn. nie związanej kwantyfikatorem. Generalizacja za pomocą funktorów może być zastosowana także do funkcji propozycjonalnych dwóch lub więcej zmiennych, przy czym każda ze zmiennych może być związana osobno. Np. wiążąc zmienną y w funkcji fxy kwantyfikatorem szczegółowym, otrzymujemy wyrażenie „$(Ey)fxy$“, w którym x pozostaje zmienną wolną; otrzymane wyrażenie jest przeto funkcją propozycjonalną zmiennej x; z kolei może być także ta zmienna związana np. kwantyfikatorem ogólnym, tak iż w rezultacie otrzymujemy zdanie „$(x)(Ey)fxy$“. Stosując inne sposoby generalizacji do tej samej funkcji fxy, otrzymalibyśmy inne zdania, na ogół różne od wyżej wypisanego, „$(Ex)(y)fxy$“, „$(x)(y)fxy$“, „$(Ex)(Ey)fxy$“.

Istnieje analogia między kwantyfikatorem ogólnym i koniunkcją oraz kwantyfikatorem szczegółowym i alternatywą. Analogia ta jest widoczna, gdy zakres zmienności zmiennej pod kwantyfikatorem obejmuje jedynie skończoną liczbę wartości. Wtedy bowiem możemy utworzyć koniunkcję lub alternatywę wartości funkcji dla wszystkich wartości argumentu i łatwo przekonać się, że wyrażenie „$(x)fx$“ jest prawdziwe zawsze i tylko, jeżeli prawdziwa jest koniunkcja wartości funkcji dla wszystkich wartości argumentu (tzn. gdy ~~„(x)“ lub „(y)“ itp., który czytamy „dla każdego x“ lub „dla każdego y“~~ dla każdej wartości argumentu wartości funkcji jest v), wyrażenie zaś „$(Ex)fx$“

Potrzebę tego ograniczenia wyjaśni następujący przykład: Funkcja propozycjonalna 1) C(x)Cfxgxgx staje się zdaniem prawdziwym dla wartości x, dla których gx staje się zdaniem prawdziwym. Podstawmy w niej gx/Cgxfx, otrzymamy jako wynik podstawienia 2) C(x)CfxCgxfxCgxfx. Poprzednikiem implikacji 2) jest zdanie (x)CfxCgxfx, w którym zmienna wolna x z wyrażenia podstawionego została związana kwantyfikatorem. Przypuśćmy, że dla pewnej wartości x, dla której gx jest zdaniem prawdziwym, fx staje się zdaniem fałszywym. W tym przypadku implikacja CfxCgxfx pozostaje prawdziwa, nie narusza przeto prawdziwości zda-

jest prawdziwe zawsze i tylko, gdy prawdziwa jest alternatywa wartości funkcji dla wszystkich wartości argumentu (tzn. gdy dla pewnej — przynajmniej dla jednej — wartości argumentu wartość funkcji jest *v*).

2. Aksjomaty i dyrektywy rozumowania

Teoria funkcji propozycjonalnych z kwantyfikatorami ma postać systemu sformalizowanego (231). W systemie tym na czele stoją aksjomaty i dyrektywy rozumowania teorii zdań, dwa aksjomaty przytoczone poniżej i następujące dyrektywy rozumowania, dotyczące zmiennych nazwowych i kwantyfikatorów:

1a) Dyrektywa podstawiania dla zmiennych nazwowych: Podstawia się jedynie za zmienne wolne. Za zmienną nazwową wolno podstawić inną zmienną nazwową o tym samym zakresie zmienności albo też nazwę z zakresu zmienności zmiennej

1b) Dyrektywa podstawiania dla funkcji propozycjonalnych: Wolno podstawić za funkcję propozycjonalną argumentów *x*, *y*... inną funkcję propozycjonalną tych samych argumentów i ewentualnie jeszcze innych zmiennych wolnych z tym jednak ograniczeniem, że każda zmienna wolna wyrażenia podstawionego po podstawieniu ma nadal pozostać zmienną wolną.

2) Dyrektywa dołączania kwantyfikatorów: Niech będzie *U* wyrażeniem nie zawierającym zmiennej wolnej *x*. Mając tezę postaci *CUfx*, wolno uznać również *CU(x)fx*, a mając tezę *CfxU*, wolno uznać również *C(Ex)fxU*. Np. z tezy 223,2 teorii zdań przez podstawienie *q/fx* otrzymuje się wyrażenie *CpApfx*, a stąd przez zastosowanie reguły dołączania kwantyfikatora — tezę *Cp(x)Apfx*; na podstawie zaś tezy *CfxN(x)Nfx* (jeżeli *fx*, to nieprawda, że dla każdego *x* : *Nfx*), która nie zawiera w następniku zmiennej wolnej, choć występuje tam zmienna związana, uznajemy tezę *C(Ex)fxN(x)Nfx* (jeżeli dla pewnego *x* : *fx*, to nieprawda, że dla każdego *x* : *Nfx*).

2') Dyrektywa dołączania kwantyfikatorów pozwala utworzyć dyrektywę wtórną: Jeżeli wyrażenie *Fx*, które zawiera zmienną wolną *x*, jest tezą logiki, to także *(x)Fx* jest tezą logiki. Albowiem według prawa symplifikacji (221,2) można tezę *Fx* przekształcić na tezę *CpFx*, w której *p* dobieramy tak, by było prawdziwe i nie zawierało zmiennej wolnej *x* — i z której, według dyrektywy dołączania kwantyfikatora ogólnego, otrzymuje się *Cp(x)Fx*, stąd zaś przez oderwanie ostatecznie *(x)Fx*.

Poniżej są podane ważniejsze tezy teorii funkcji propozycjonalnych z kwantyfikatorami. Do poszczególnych tez dołącza się: a) sformułowanie tezy w wyrazach języka potocznego, b) przykład, c) inne objaśnienia. Dobór przykładów ułatwiamy sobie przyjmując, że sens tez daje się przedstawić należycie, jeżeli będziemy ilustrować: *(x)fx* zdaniem ogólnym twierdzącym, *(x)Nfx* zdaniem ogólnym przeczącym, *(Ex)fx* i *(Ex)Nfx* zdaniami szczegółowymi twierdzącymi i przeczącymi, *fa* (*a* jest nazwą) zdaniami jednostkowymi.

nia (x)CfxCgxfx, natomiast fałszywy staje się następnik w 2), tj. Cgxfx i całe wyrażenie 2); skąd wniosek, że podstawienie było niepoprawne.

Aksjomaty:

312,1 $C(x)fxfa$

a) jeżeli dla każdego x : fx, to fa;

b) jeżeli dla każdej liczby naturalnej n : $2n—1$ jest liczbą nieparzystą, to $2.3—1$ jest liczbą nieparzystą,

c) w tezie 312,1 x jest zmienną związaną, natomiast a nie jest zmienną, lecz dowolną wartością zmiennej, fa nie jest przeto funkcją propozycjonalną, lecz jednym, którymkolwiek ze zdań otrzymanych z funkcji fx przez podstawienie za x nazwy a z zakresu zmienności x, czyli przez specjalizację (311). Sens prawa 312,1 można oddać słowami: Co jest prawdą o każdym przedmiocie pewnego rodzaju, to jest też prawdą o którymkolwiek przedmiocie tego rodzaju. Jest to zatem jedno z ujęć *dictum de omni* (212) i pozwala wnioskować z prawdziwości zdania ogólnego o prawdziwości podpadających pod nie zdań jednostkowych.

312,2 $Cfa(Ex)fx$

a) jeżeli fa, to dla pewnego x : fx;

b) jeżeli $1^2 = 1$, to dla pewnego x : $x^2 = x$;

c) prawo 312,2 pozwala wnioskować z przykładu (zdania jednostkowego) o prawdziwości zdania szczegółowego. Przy rozumieniu zdania ogólnego $(x)fx$ jako zdania o tym, co jest konieczne, zdania jednostkowego fa jako zdania o tym, co jest faktycznie, a zdania szczegółowego $(Ex)fx$ jako zdania o tym, co jest możliwe, teza 312,1 odpowiada regule *ab oportet ad esse valet consequentia*, teza 312,2 zaś regule *ab esse ad posse valet consequentia*.

3. Kwantyfikator ogólny (x)

313,1 $C(x)NfxN(x)fx$

a) jeżeli dla każdego x : nieprawda, że fx, to nieprawda, że dla każdego x : fx;

b) jeżeli żaden Eskimos nie lubi upałów, to nieprawda, że każdy Eskimos lubi upały;

c) teza 313,1 daje się interpretować jako prawo przeciwieństwa; zdanie ogólne przeczące implikuje negację zdania ogólnego twierdzącego. Związek odwrotny nie zachodzi, tzn. negacja zdania ogólnego twierdzącego nie implikuje zdania ogólnego przeczącego. Inaczej: kwantyfikator ogólny może być przeniesiony pod znak negacji, lecz nie odwrotnie.

Stąd przez transpozycję

313,1a) $C(x)fxN(x)Nfx$

zdanie og. twierdz. implikuje negację zdania og. przecz.

313,2 *(x)AfxNfx*

a) dla każdego *x* : *fx* lub *Nfx*;

b) dla każdej liczby naturalnej *x* : *x* jest parzyste lub nieparzyste (inaczej: każda liczba naturalna jest parzysta lub nieparzysta);

c) prawo wyłączonego środka dla funkcji propozycjonalnych: z dwóch funkcji propozycjonalnych *fx* i *Nfx* zawsze, tj. dla każdego *x*, jedna staje się zdaniem prawdziwym. Prawo to służy zarazem do scharakteryzowania przedmiotu indywidualnego *x*; przedmiot indywidualny *x* charakteryzuje się tym mianowicie, że jeżeli wypowiadamy o nim dwa zdania sprzeczne, to jedno z nich jest prawdziwe. Tę właściwość przedmiotu indywidualnego ujmuje się też słowami: przedmiot indywidualny jest całkowicie zdeterminowany.

313,3 *C(x)KfxgxK(x)fx(x)gx*

a) jeżeli dla każdego *x*:*fx* i *gx*, to dla każdego *x*:*fx* i dla każdego *x* : *gx*;

b) jeżeli każda liczba podzielna przez *6* jest podzielna przez *2* i przez *3*, to każda liczba podzielna przez *6* jest podzielna przez *2* i każda liczbą podzielna przez *6* jest podzielna przez *3*.

313,4 *CK(x)fx(x)gx(x)Kfxgx*

a) jeżeli dla każdego *x*:*fx* i dla każdego *x*:*gx*, to dla każdego *x*:*fx* i *gx*;

c) pamiętając o pokrewieństwie między kwantyfikatorem ogólnym i koniunkcją możemy tezy 313,3 i 313,4 uważać za uogólnienie prawa przemienności dla koniunkcji (teza 224,4). Przypuśćmy bowiem, że zakres zmienności zmiennej *x* obejmuje dwie wartości *a*, *b* i że *(x) fx* jest równoważne iloczynowi *Kfafb* itp., to 313,3 przyjmie postać *CKKfagaKfbgbKKfafbKgagb*, 313,4 zaś postać *CKKfafbKgagbKKfagaKfbgb*

313,5 *CA(x)fx(x)gx(x)Afxgx*

a) jeżeli dla każdego *x* : *fx* lub dla każdego *x* : *gx*, to dla każdego *x* : *fx* lub *gx*;

b) jeżeli w obrębie określonego zbioru liczb naturalnych *x* : każde *x* jest liczbą parzystą lub każde *x* jest liczbą nieparzystą, to każde *x* jest liczbą parzystą lub nieparzystą;

c) przykład b) wykazuje, że teza 313,5 nie może być odwrócona. Teza ta różni się od 313,4 znakiem alternatywy występującym zamiast koniunkcji, jej analogicznym odpowiednikiem w logice zdań jest teza 224,3. Pozwala ona wyłączyć znajdujący się przy obu członach alternatywy kwantyfikator ogólny przed znak alternatywy.

313,6 $C(x)CfxgxC(x)fx(x)gx$

a) jeżeli dla każdego x: jeżeli fx, to gx, to jeżeli dla każdego x: fx, to dla każdego x: gx;

b) jeżeli każdy, kto by wsiadł do starej łódki, zatonąłby wraz z nią, to jeżelibyście wszyscy trzej wsiedli do starej łódki, wszyscy trzej zatonęlibyście (lecz nie na odwrót: stąd, że jeżelibyście wszyscy trzej wsiedli do starej łódki, to wszyscy trzej zatonęlibyście, nie wynika, że każdy z was, kto by (pojedynczo) wsiadł w tę łódkę, zatonąłby;

CKCprCqsCKpqKrs

c) teza 313,6 nie może być odwrócona, podobnie jak teza 224,20 teorii zdań, (ogólne prawo kompozycji dla koniunkcji), której uogólnieniem jest teza 313,6 (jeżeli tezę 224,20 przekształcimy podstawiając w niej p/fa, q/fb, r/ga, s/gb, to otrzymane wyrażenie będzie rozwinięciem tezy 313,6 przy założeniu, że zakres zmienności zmiennej x obejmuje dwie wartości a b). Teza 313,6 pozwala włączyć stojący przed znakiem implikacji kwantyfikator ogólny do jej wnętrza przez skwantyfikowanie obu jej członów.

313,7 $C(x)(y)fxy(y)(x)fxy$

313,8 $C(y)(x)fxy(x)(y)fxy$

c) tezy 313,7 i 313,8, których odczytanie nie przedstawia trudności, mogą być uważane, podobnie jak tezy 313,3 i 313,4, za uogólnienie prawa przemienności dla koniunkcji, a to z uwagi na analogię między tą funkcją prawdziwościową i kwantyfikatorem ogólnym; mianowicie jeżeli dla przykładu przyjmiemy, że x przybiera wartości a, b, zaś y wartości c, d, kwantyfikator ogólny rozwiniemy zaś jako koniunkcję, to 313,7 przechodzi w wyrażenie $CKKfacfadKfbcfbdKKfacfbcKfadfbd$, 313,8 na odwrotną implikację.

4. Kwantyfikator szczegółowy (Ex)

314,1 $CN(Ex)fx(Ex)Nfx$

a) jeżeli nieprawda, że dla pewnego x: fx, to dla pewnego x: nieprawda, że fx;

b) jeżeli nieprawda, że niektóre koty szczekają, to niektóre koty nie szczekają;

c) teza 314,1 daje się interpretować jako prawo podprzeciwieństwa, negacja zdania szczegółowego twierdzącego implikuje zdanie szczegółowe przeczące, związek odwrotny nie zachodzi, tzn. zdanie szczegółowe przeczące nie implikuje negacji zdania szczegółowego twierdzącego. Kwantyfikator szczegółowy może być wyłączony przed znak negacji, lecz nie odwrotnie. Według analogii, jaka istnieje między kwantyfikatorem ogólnym i koniunkcją oraz kwantyfikatorem szczegółowym i alternatywą, teza 314,1 odpowiada dualnie (223) tezie 313,1.

314,2 $N(Ex)KfxNfx$

a) nieprawda, że dla pewnego $x: fx$ i Nfx;
b) nieprawda, że dla pewnych liczb naturalnych x: x jest parzyste i x jest nieparzyste;
c) teza 314,2 przedstawia p r a w o s p r z e c z n o ś c i dla funkcji prawdziwościowych i odpowiada dualnie tezie 313,2: uzupełnia ono charakterystykę indywiduów daną przez tezę 313,2 stwierdzając, iż nie ma takiego przedmiotu indywidualnego, aby z dwóch zdań o nim sprzecznych oba były prawdziwe — żaden przedmiot indywidualny nie posiada cech sprzecznych.

314,3 $C(Ex)AfxgxA(Ex)fx(Ex)gx$

a) jeżeli dla pewnego $x: fx$ lub gx, to dla pewnego $x: fx$ lub dla pewnego $x : gx$;
b) jeżeli niektóre koty są czarne lub białe, to niektóre koty są czarne lub niektóre koty są białe.

314,4 $CA(Ex)fx(Ex)gx(Ex)Afxgx$

c) tezy 314,3 i 314,4 są odwrotne względem siebie, przy czym teza 314,3 odpowiada dualnie tezie 313,4, teza 314,4 — tezie 313,3. Analogicznie do tamtych tezy 314,3 i 314,4 mogą być uważane za uogólnienia prawa przemienności dla alternatywy (tezy 223,4); przy analogicznym założeniu, jak to, które uczyniliśmy dla ilustracji stanu rzeczy przy tezie 313,3, teza 314,3 przyjmie postać $CAAfagaAfbgbAAfafbAgagb$.

314,5 $C(Ex)KfxgxK(Ex)fx(Ex)gx$

a) jeżeli dla pewnego $x: fx$ i gx, to dla pewnego $x: fx$ i dla pewnego $x: gx$;
b) jeżeli niektórzy mieszkańcy Północy są ponurzy i małomówni, to niektórzy mieszkańcy Północy są ponurzy i niektórzy mieszkańcy Północy są małomówni;
c) teza ta odpowiada dualnie tezie 313,5 i, podobnie jak tamta, nie może być odwrócona. Możemy ją uważać, podobnie jak tezę 313,5, za uogólnienie tezy 224,37 teorii zdań, która dualnie odpowiada sama sobie. Teza 314,5 pozwala włączyć kwantyfikator szczegółowy pod znak koniunkcji podobnie, jak teza 314,3 czyni to dla alternatywy.

314,6 $CC(Ex)fx(Ex)gx(Ex)Cfxgx$

a) jeżeli prawdą jest, że jeżeli dla pewnego $x: fx$, to dla pewnego $x: gx$, to prawdą jest dla pewnego x: że jeżeli fx, to gx;
b) przypuśćmy, że w pewnym towarzystwie grają w karty; jeżeli prawdą jest, iż jeżeli ktoś gra w karty, to ktoś (ten lub inny) przegra, to prawdą jest też o kimś, iż jeżeli gra w karty, to przegra;

c) teza ta odpowiada dualnie tezie 313,6 i jest uogólnieniem tezy 223,14 teorii zdań. Pozwala ona wyłączyć kwantyfikator szczegółowy z obu członów implikacji przed znak implikacji.
Tezy 314,6 nie można odwrócić, co objaśnia następujący przykład: niech zbiór *x-ów* zawiera tylko trzy przedmioty; czerwony, żółty i niebieski. Zdanie „jeżeli dla pewnego $x:x$ jest czerwone, to dla pewnego $x:x$ jest zielone" jest fałszywe, bo istnieje x czerwone, lecz nie ma x zielonego. Natomiast zdanie „dla pewnego x: jeżeli x jest czerwone, to jest zielone" jest prawdziwe, mianowicie zarówno żółte, jak i niebieskie x są takie, iż nie spełniają ani jego poprzednika, ani jego następnika, implikacja zaś przy fałszywym poprzedniku i fałszywym następniku jest prawdziwa. Implikacja, w której pierwsze z obu zdań (fałszywe) jest poprzednikiem, a drugie (prawdziwe) — następnikiem, jest prawdziwa i jest przykładem dla tezy 314,6; implikacja odwrotna, jako przykład dla odwrócenia tej tezy, jest fałszywa.

314,7 $C(Ex)(Ey)fxy(Ey)(Ex)fxy$
314,8 $C(Ey)(Ex)fxy(Ex)(Ey)fxy$

c) odczytanie tych tez nie przedstawia trudności, możemy je uważać, podobnie jak tezy 314,3 i 314,4, za uogólnienia prawa przemienności dla alternatywy z teorii zdań; mianowicie, jeżeli — dla przykładu — x przyjmuje wartości a, b, zaś y wartości c, d, to lewa strona implikacji 314,7 (i prawa strona implikacji 314,8) porządkuje wartości funkcji fxy w kolejności fac, fad, fbc, fbd, strona zaś prawa implikacji 314,7 (i lewa 314,8) w kolejności fac, fbc, fad, fbd.

5. Związki między obu kwantyfikatorami (x), (Ex)

315,1 $CN(x)fx(Ex)Nfx$

a) jeżeli nieprawda, że dla każdego $x:fx$, to dla pewnego $x:Nfx$;
b) jeżeli nieprawda, że wszystkie koty są szare, to niektóre koty nie są szare.

315,2 $C(Ex)NfxN(x)fx$

c) tezy 315,1 i 315,2 tworzą łącznie prawo negacji zdania ogólnego twierdzącego: negacją zdania ogólnego twierdzącego jest zdanie szczegółowe przeczące.

315,3 $CN(Ex)fx(x)Nfx$
315,4 $C(x)NfxN(Ex)fx$

c) prawo negacji zdania szczegółowego twierdzącego: negacją zdania szczegółowego twierdzącego jest zdanie ogólne przeczące.

315,5 $C(x)fx(Ex)fx$

a) jeżeli dla każdego $x : fx$, to dla pewnego $x : fx$;

b) prawo subalternacji (podporządkowania) zdania szczegółowego twierdzącego pod zdanie ogólne twierdzące.

315,6 $C(x)CfxgxC(Ex)fx(Ex)gx$

a) jeżeli dla każdego x: jeżeli fx, to gx, to jeżeli dla pewnego $x : fx$, to dla pewnego $x : gx$;

b) jeżeli o każdym zwierzęciu parzystokopytnym jest prawdą, że jest zwierzęciem przeżuwającym, to jeżeli pewne zwierzę jest parzystokopytne, to także pewne zwierzę jest przeżuwające;

c) teza ta jest uogólnieniem tezy 224,18, czyli ogólnego prawa kompozycji dla alternatywy, podobnie jak teza 313,6 jest uogólnieniem tezy 224,20, a teza 314,6 uogólnieniem tezy 223,14. Łączy się w niej prawo włączania kwantyfikatora pod znak implikacji (teza 313,6) z prawem subalternacji (teza 315,5).

315,7 $C(Ey)(x)fxy(x)(Ey)fxy$

a) jeżeli dla pewnego y: przy każdym $x : fxy$, to dla każdego x: przy pewnym $y : fxy$;

b) niech x, y reprezentują liczby naturalne wraz z liczbą O, fxy niech znaczy „x nie jest mniejsze od y"; otrzymujemy przykład dla tezy 315,7: jeżeli dla pewnego y, przy każdym x, x nie jest mniejsze od y (takim y jest O), to dla każdego x przy pewnym y, x nie jest mniejsze od y (inaczej: jeżeli istnieje liczba, od której żadna nie jest mniejsza, to dla każdej liczby można dobrać taką, od której nie będzie ona mniejsza);

c) teza 315,7 jest uogólnieniem tezy 313,5 (kwantyfikator szczegółowy uważamy za uogólnienie alternatywy); podobnie jak teza 313,5, nie daje się ona odwrócić. Jeżeli w przykładzie b) funkcji fxy nadamy znaczenie „x jest mniejsze od y", to poprzednik implikacji staje się fałszywy, fałszem mianowicie jest, że dla pewnego y przy każdem x, x jest mniejsze od y, albowiem nie ma w szeregu naturalnym liczby największej, natomiast następnik pozostaje prawdziwy: dla każdego x przy pewnym y, x jest mniejsze od y, ponieważ dla każdej liczby naturalnej x potrafimy dobrać większą od niej y. Przykład ten sprawdza przeto tezę 315,7, natomiast teza odwrotna byłaby w tym przypadku fałszywa. Kwantyfikator ogólny i kwantyfikator szczegółowy nie są względem siebie przemienne, tak jak przemienne są kwantyfikatory ogólne między sobą (tezy 313,7 i 313,8) i kwantyfikatory szczegółowe między sobą (tezy 314,7 i 314,8); porządek ich można zmienić tylko wtedy, jeżeli kwantyfikator ogólny następuje po szczegółowym.

6. Implikacja materialna i formalna

W teorii funkcji propozycjonalnych z kwantyfikatorami oprócz implikacji międzyzdaniowej *Cpq*, zwanej materialną lub indywidualną, występuje implikacja międzyfunkcyjna $(x)Cfxgx$, zwaną formalną, w przeciwstawieniu do materialnej, lub generalną, w przeciwstawieniu do indywidualnej. Implikacja formalna zachodzi między funkcjami propozycjonalnymi fx i gx zawsze i tylko, jeżeli dla każdego x zachodzi jeden z trzech przypadków charakteryzujących implikację, mianowicie jeżeli a) wartością fx jest v, wartością gx jest v; b) wartością fx jest f, wartością gx jest v; c) wartością fx jest f, wartością gx jest f; — wykluczony jest natomiast przypadek, w którym wartością fx jest v, wartością gx jest f. Zgodnie z tym przypadki, w których zachodzi między funkcjami fx i gx implikacja formalna, klasyfikują się w sposób następujący:

I) Wartością fx jest f dla każdej wartości x, wobec czego gx może być funkcją jakąkolwiek, np. dla każdego x: jeżeli x jest różne od x, to x jest kwadratem.

II) Wartością gx jest v dla każdej wartości x, wobec czego fx może być funkcją jakąkolwiek, np. dla każdego x: jeżeli x jest kwadratem, to x nie jest różne od x.

III) Funkcje fx i gx są tego rodzaju, iż implikacja formalna między nimi zachodzi tautologicznie, tzn. jest tezą teorii funkcji propozycjonalnych, np. przypuśćmy, że gx jest alternatywą dwóch funkcji propozycjonalnych f_1x oraz f_2x, to $(x)Cf_1xAf_1xf_2x$.

IV) Nie zachodzi żaden z przypadków I—III, natomiast spełnienie warunków implikacji jest gwarantowane przez sens funkcyj fx i gx, np. dla każdego x: jeżeli x jest wielorybem, to x jest zwierzęciem ssącym.

W ostatnim przypadku dla stwierdzenia, że zachodzi implikacja formalna, musimy wyjść poza logikę, sięgnąć do wiedzy specjalnej, najczęściej do praw ogólnych w naukach empirycznych. Ale też dlatego właśnie ten ostatni przypadek wchodzi w grę przy wszelkich zastosowaniach tez logiki do wnioskowania w naukach specjalnych i najbliższy jest temu rozumieniu wyrazu „jeżeli", przy którym mówimy o „wynikaniu" między zdaniami w jednym ze znaczeń tego wyrazu: Zdanie p wynika w tym rozumieniu ze zdania q według jakiegoś prawa ogólnego, które jest implikacją formalną taką, iż zdania p i q są interpretacjami funkcji propozycjonalnych w poprzedniku i następniku tej implikacji. Dlatego właśnie, że ważna jest implikacja formalna: jeżeli x jest nauczycielem y, to y jest uczniem x, mówimy, że ze zdania „Platon był nauczycielem Arystotelesa" wynika zdanie „Arystoteles był uczniem Platona". Od wynikania implikacyjnego, o którym tutaj mowa i które jest związane z implikacją, odróżnia się wynikanie inferencyjne pomiędzy tezami pewnej teorii: mianowicie teza T wynika inferencyjnie z tezy T', znaczy, że teza T' (ewentualnie wraz z innymi tezami) występuje w którymkolwiek z dowodów tezy T, jakie można zbudować w danej teorii.

Dwie funkcje propozycjonalne, między którymi obustronnie zachodzi implikacja formalna, są formalnie (lub generalnie) równoważne: $(x)Efxgx$. Dwie funkcje propozycjonalne formalnie równoważne przybierają dla każdej wartości x identyczne wartości logiczne. Zbiór przedmiotów a określony przez to, że fa, tj. przez to, że zdanie otrzymane przez podstawienie wartości a za zmienną x w funkcji fx jest zdaniem prawdziwym, nazywa się zakresem (lub ekstensją) tej funkcji. Dwie funkcje propozycjonalne formalnie równoważne mają identyczne zakresy, takimi są np. funkcje: x jest trójkątem równokątnym — oraz: x jest trójkątem równobocznym. Jeżeli przeto utworzymy funkcję prawdziwościową funkcji propozycjonalnych, np. $Cfxgx$, to przebieg wartości funkcji prawdziwościowej dla wartości zmiennej x nie uległby zmianie, gdybyśmy za fx lub gx podstawili inne funkcje propozycjonalne, formalnie tamtym równoważne, czyli inne funkcje o takiej samej ekstensji. Funkcje prawdziwościowe funkcji propozycjonalnych zależą przeto wyłącznie od ekstensji swoich argumentów, nie zależą natomiast od innych ich właściwości (treści lub sensu). Wyrażenia zbudowane z funkcji propozycjonalnych w ten sposób, iż ich wartość logiczna zależy jedynie od ekstensji funkcji propozycjonalnych, nazywają się funkcjami ekstensjonalnymi. Funkcje prawdziwościowe funkcji propozycjonalnych są przeto funkcjami ekstensjonalnymi. Zasada ekstensjonalności dla pewnej teorii głosi, że w obrębie tej teorii wszystkie funkcje zdaniowe są funkcjami ekstensjonalnymi. Jeżeli przyjmiemy, jak to przypuściliśmy (211), że w teorii zdań rzekome funkcje zdaniowe argumentów zdaniowych, nie będące funkcjami prawdziwościowymi, są takimi tylko pozornie, to w teorii tej obowiązuje zasada ekstensjonalności.

Rozdział 2. Inne teorie funkcji logicznych z kwantyfikatorami

1. Teoria zdań z kwantyfikatorami

Logika zdań może być uogólniona przez wprowadzenie kwantyfikatorów jeszcze inaczej. Mianowicie można wiązać kwantyfikatorami nie zmienne nazwowe w funkcjach propozycjonalnych występujących jako argumenty funkcji prawdziwościowych (jak to czyniliśmy wyżej), lecz wprost argumenty zdaniowe funkcji prawdziwościowych. Powstaje w ten sposób teoria zdań z kwantyfikatorami, w której wyrażeniami sensownymi są wyrażenia sensowne logiki zdań i wyrażenia zbudowane z kwantyfikatora z następującym po nim wyrażeniem sensownym, którego zmienne zostają związane przez kwantyfikator, np. „$(p)p$", czyli „dla każdego p: prawda, że p"; „$(p)Cpp$", czyli „dla każdego p: jeżeli p to p"; „$C(p)pp$", czyli „jeżeli dla każdego p: prawda, że p, to p"; „$Cp(p)p$", czyli „jeżeli p, to dla każdego p: prawda, że p" itp. Wartości logiczne zdań z kwantyfikatorami obliczamy biorąc pod uwagę matryce dwuwartościowe funkcji prawdziwościowych i zakładając, iż wartość zdania $(p)Fp$ (F reprezentuje

dowolny funktor prawdziwościowy) jest identyczna z wartością koniunkci: $KFvFf$. Obliczamy zatem (posługujemy się skróconym sposobem pisanija którego odczytanie nie nasunie trudności):

$(p)p = Kvf = f$

$(p)Cpp = KCvvCff = v$

$C(p)pp = CKvfp = Cfp = v$ (wyrażenie Cfp jest funkcją prawdziwościową argumentu p tautologicznie prawdziwą),

$Cp(p)p = CpKvf = Cpf$; wyrażenie Cpf jest funkcją prawdziwościową argumentu p równoważną Np, albowiem zachowuje się dokładnie tak, jak Np, przyjmując wartość przeciwną wartości p; mamy mianowicie $Cvf = f$, $Cff = v$. Można więc zapisać tezę

321,1 $ENpCp(p)p$

i na jej podstawie zdefiniować negację przez wyrażenie $Cp(p)p$.

Teoria zdań z kwantyfikatorami jest ujęta w system aksjomatyczny. W systemie tym terminami pierwotnymi są implikacja i kwantyfikator ogólny, przy czym w aksjomatach występuje implikacja jako jedyny termin pierwotny, mianowicie aksjomatami są tezy 221,2 i 221,5 oraz 221,7 teorii zdań. Drugi termin pierwotny zostaje wprowadzony do tez teorii przez podstawienie, albowiem dyrektywa podstawiania pozwala podstawiać za zmienne zdaniowe wyrażenia sensowne z kwantyfikatorem ogólnym. Dyrektywa zastępowania pozwala zastąpić wyrażenie „$Cp(p)p$" przez „Np". Kwantyfikator szczegółowy jest zbędny, lecz mógłby być wprowadzony drogą zastąpienia wyrażenia „$N(p)Fp$" przez „$(Ep)NFp$". Oprócz reguł podstawiania, odrywania i zastępowania obowiązują dwie reguły operowania kwantyfikatorem ogólnym; reguła dołączania kwantyfikatora i reguła opuszczania kwantyfikatora. Reguła dołączania kwantyfikatora jest analogiczna do reguły dołączania kwantyfikatora ogólnego w teorii funkcji propozycjonalnych (312), pozwala ona przeto np. na podstawie tezy $CqCpq$ uznać tezę $Cq(p)Cpq$. Reguła opuszczania kwantyfikatora jest odwrotna do poprzedniej, pozwala np. na podstawie tezy $CpCNp(q)q$ uznać tezę $CpCNpq$.

Z wyżej wymienionych aksjomatów wynikają inferencyjnie, według przyjętych dyrektyw, aksjomaty implikacyjno-negacyjnej teorii zdań, a zatem i wszelkie inne jej tezy. Można nadto przekształcać tezy teorii zdań przez związanie występujących w nich zmiennych kwantyfikatorami ogólnymi, wykazując przy tym, że każda tak przekształcona teza jest inferencyjnie równoważna na gruncie naszej teorii tezie nie zawierającej kwantyfikatorów. Tak przeto przyjęte na czele aksjomaty są równoważne tezom,

321,2 $(p)(q)CqCpq$

321,3 $(p)(q)(r)CCpqCCqrCpr$

321,4 $(p)(q)CCCpqpp$

Okazuje się zupełna równoległość między pojmowaniem tez teorii zdań jako funkcji tautologicznych i jako zdań zgeneralizowanych.

2. Prototetyka

Można za pomocą kwantyfikatorów uogólnić teorię zdań także w ten sposób, iż wiąże się kwantyfikatorami nie tylko zmienne zdaniowe, lecz także zmienne reprezentujące funkcje prawdziwościowe. Tak powstaje system zwany rozszerzoną teorią funkcyj prawdziwościowych. Przykładem tezy, która należy do tej teorii, jest zasada ekstensjonalności dla funkcji prawdziwościowych

322,1 (*p*)(*q*)*CEpq*(*F*)*EFpFq*,

tzn. dla każdego *p* i dla każdego *q*: jeżeli *Epq*, to dla każdego (*F*): *Fp* zawsze i tylko, jeżeli *Fq* (*F* jest zmienną, która reprezentuje funkcji prawdziwościowe).

System aksjomatyczny i sformalizowany tak uogólnionej teorii zdań został zbudowany pod nazwą prototetyki przez Leśniewskiego. Jak teoria zdań z kwantyfikatorami (321) mogła zostać oparta na implikacji jako jedynym terminie pierwotnym, ponieważ negację, tj. drugi termin pierwotny implikacyjno-negacyjnej teorii zdań, można było przedstawić przez implikację i kwantyfikator ogólny, tak prototetyka zawiera jako jedyny termin pierwotny równoważność, ponieważ wprowadzając kwantyfikator wiążący zmienny znak funkcji prawdziwościowej można przez równoważność przedstawić negację i implikację. Równoważność jako termin pierwotny posiada tę dogodność, iż może być użyta zamiast znaku równoznaczności definicyjnej; wiemy bowiem, że wyrażenia równoznaczne są także równoważne. Tak definicje stają się tezami systemu i służą wprost do wprowadzenia doń pozostałych funktorów prawdziwościowych. Jako definicja negacji służy teza, zbudowana analogicznie, jak 321,1:

322,2 *ENpFp*(*p*)*p*

Definicją implikacji jest teza 226,11 *ECpqEpKpq*. Występuje w niej jednak znak koniunkcji, który należy wyeliminować. Jest to możliwe, jeśli powołamy się na tezę następującą:

322,3 (*p*)(*q*)*EKpq*(*F*)*EpEFpFq*,

która ustala równoważność między *Kpq* oraz wyrażeniem (*F*)*EpEFpFq*. *EFpFq* jest, według 322,1, prawdą przy każdym *F*, jeżeli zdania *p* i *q* są bądź oba prawdziwe, bądź oba fałszywe; zatem gdy *p* i *q* prawdziwe, równoznaczność (*F*)*EpEFpFq* jest prawdziwa, natomiast jest ona fałszywa, gdy *p* i *q* fałszywe. Jeżeli zaś jedno z obu zdań *p* i *q* jest prawdziwe, drugie fałszywe, to wyrażenie *EFpFq* jest dla pewnych wartości *F* prawdziwe, dla innych fałszywe, zatem (*F*)*EpEFpFq* jest w tych przypadkach zawsze, tj. zarówno dla $p = v$ $q = f$ jak dla $p = f$, $q = v$ fałszywe; dla sprawdzenia należy (*F*)*EpEFpFq* rozwinąć na wyrażenie $KKKEpEF_1pF_1qEpEF_2pF_2qEpEF_3pF_3qEpEF_4pF_4q$ i wstawić w nie wartości z matrycy 241,7. Tak przeto (*F*)*EpEFpFq* jest prawdziwe jedynie przy $p=v$ i $q=v$, tzn. jest równoważne z *Kpq*.

Wprowadzając do tezy 226,11 zamiast Kpq wyrażenie równoważne $(F)EpEFpFq$ i dołączając kwantyfikatory (p), (q) otrzymuje się

322,4 $(p)(q)ECpqEp(F)EpEFpFq$,

co jest definicją implikacji przez równoważność i kwantyfikatory.

Jedyny aksjomat prototetyki o skomplikowanej budowie zawiera jako termin pierwotny funktor E oraz dwie związane kwantyfikatorami ogólnymi zmienne funkcyjne F, G od dwóch argumentów zdaniowych; jest on równoważny układowi złożonemu z trzech aksjomatów, z których pierwszy jest pewną odmianą prawa sylogizmu dla równoważności, drugi — prawem łączności dla niej, a trzeci jest uogólnieniem zasady ekstensjonalności. Bardzo szczegółowe dyrektywy sensu dotyczą podstawiania, odrywania, definiowania i wprowadzania kwantyfikatorów. Wśród tez prototetyki znajduje się cała teoria zdań zwykła i z kwantyfikatorami.

3. Rozszerzona teoria funkcji propozycjonalnych

Jeżeli wreszcie wprowadzimy do teorii funkcji propozycjonalnych zmiennych nazwowych kwantyfikatory, które wiążą zmienne reprezentujące funktory zdaniotwórcze argumentów nazwowych, to możemy otrzymać nowe tezy dotyczące własności indywiduów. Mianowicie teza 313,2, czyli prawo wyłączonego środka dla funkcji propozycjonalnych, daje się uogólnić na tezę głoszącą, że dla każdego indywiduum prawdą jest pewne zdanie o tym indywiduum lub że każdy przedmiot posiada pewną własność:

323,1 $(x)(Ef)fx$

W podobny sposób teza 314,2, tj. prawo sprzeczności dla funkcji propozycjonalnych, prowadzi do tezy, że nie ma takiego indywiduum, aby prawdziwe było o nim wszelkie zdanie (lub że żadnemu przedmiotowi nie przysługują wszystkie własności)

323,2 $N(Ex)(f)fx$

323,3 $(Ef)(x)fx$

istnieje własność przysługująca wszystkim przedmiotom.

323,4 $N(f)(Ex)fx$

nieprawda, że każda własność przysługuje jakiemuś przedmiotowi (istnieje własność, która nie przysługuje żadnemu przedmiotowi).

Teza 323,1 wynika według 315,7 z tezy 323,3, podobnie zaś teza 323,2 z tezy 323,4, można zatem 323,3 i 323,4 uważać za dalsze uogólnienia praw wyłączonego środka i sprzeczności.

Kwantyfikator, który wiąże zmienne reprezentujące funktory zdaniotwórcze argumentów nazwowych występuje w definicji stosunku identycz-

T. z Akw.: Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio.

ności indywiduów. Definicja ta opiera się na sformułowanym przez Leibniza twierdzeniu *principium identitatis indiscernibilium: non dari posse in natura duas res singulares solo numero differentes.* Wedle powyższego twierdzenia identyczne jest to, co niczym się nie różni. Jeżeli przeto indywiduum x niczym nie różni się od indywiduum y, to x jest tym samym indywiduum, co y, a obie nazwy są nazwami tego samego indywiduum. Myśl tę formułuje teza

323,5 $(x)(y)EIxy(f)Efxfy$,

czyli: x jest identyczne z y (Ixy) zawsze i tylko, jeżeli dla każdej funkcji propozycjonalnej f wyrażenia fx i fy są równoważne (tzn. jeżeli wszystko, co orzeka się o x, orzeka się o y i odwrotnie).

Rozszerzając powyższą tezę na wyrażenia nie będące nazwami, traktujemy jako identyczność w obrębie pewnej teorii stosunek łączący w obrębie tej teorii przedmioty a i b zawsze i tylko, jeżeli dowolne zdanie o jednym z tych przedmiotów jest równoważne zdaniu, które otrzymamy, zastępując w nim a przez b i odwrotnie. Stosownie do takiego pojmowania rzeczy jest identycznością w teorii zdań równoważność dwóch funkcji prawdziwościowych, a w arytmetyce — równość dwóch liczb; w teorii zdań bowiem obowiązuje dyrektywa zastępowania wyrażeń równoważnych (212), wartość zaś wyrażeń arytmetyki nie zmieni się, jeżeli zastąpimy w nich jakieś wyrażenie liczbowe (np. 2.3) przez inne tamtemu równe (np. 3+3).

323,6 $(x)(Ey)(f)Efxfy$

dla każdego przedmiotu istnieje przedmiot z nim identyczny.

323,7 $N(Ex)(y)(f)Efxfy$

nieprawda, że istnieje przedmiot identyczny z każdym przedmiotem (istnieją przynajmniej dwa różne przedmioty). Teza ta nie może być wyprowadzona z innych tez teorii funkcji propozycjonalnych; można ją przeto uznać jedynie w postaci osobnego aksjomatu.

(y)(Ex)(Ef)fxfy dla każdego istnieje x taki, iż dla pewnej f - fxfy = Każdy przedmiot g posiada ... własność f ... przedmiot x.

323,8 $(x)(y)(Ef)Efxfy$

dla każdych dwóch przedmiotów istnieje własność taka, iż oba ją posiadają albo jej nie posiadają (każde dwa przedmioty posiadają jakąś wspólną własność).

4. Kategorie semantyczne funkcji logicznych

Kwantyfikator przekształca funkcję logiczną pewnych argumentów na zdanie o zbiorze tych argumentów (311). Wprowadzenie kwantyfikatorów stwarza przeto zagadnienie podziału funkcji logicznych na kategorie semantyczne (122). Rozróżnimy w tym celu rzędy kategorii semantycznych, a w obrębie rzędu ich typy. Nazwy i zmienne nazwowe tworzą kategorię semantyczną typu i rzędu zerowego (O). Funkcje propozycjonalne jednej zmiennej nazwowej

Aryst.: subst. pierwsze, subst. drugie ... własności i nazwy generalne ... własności – zbiory.

(np. fx, gx) oraz zdania otrzymane z nich przez specjalizację (np. fa) należą wszystkie do jednej i tej samej kategorii semantycznej typu $t(O)$, do tej samej kategorii semantycznej należą funkcje prawdziwościowe wymienionych funkcji propozycjonalnych (np. $Cfxgx$). Funkcje propozycjonalne dwóch zmiennych nazwowych (np. fxy), zdania otrzymane z nich przez specjalizację oraz ich funkcje prawdziwościowe należą do kategorii semantycznej typu $t(O,O)$ — i analogicznie dla funkcji zmiennych nazwowych o większej liczbie argumentów. Wszystkie tak otrzymane typy kategorii semantycznych $t(O)$, $t(O,O)$, $t(O,O,O)$ itd. są rzędu pierwszego. Generalizacja funkcji propozycjonalnej, należącej do jednej z kategorii semantycznych rzędu pierwszego, wiąże zmienną nazwową, natomiast pozostawia możliwość stosowania dyrektywy podstawiania funkcji propozycjonalnych (312, dyrektywa 1b), wyrażenie otrzymane jako rezultat generalizacji, jak np. $(x)(fx)$, nie jest przeto funkcją zmiennej nazwowej, natomiast pozostaje funkcją, której argumentem jest funkcja propozycjonalna zmiennej nazwowej, tzn. wyrażenie kategorii semantycznej typu $t(O)$ lub $t(O,O)$ itd. — rzędu pierwszego, można je bowiem według wymienionej dyrektywy podstawiania przekształcić np. na $(x)gx$, $(x)\, hxy$ itp. Generalizacja daje przeto w wyniku wyrażenie nowej kategorii semantycznej typu, który oznaczamy analogicznie do poprzednich symbolem $t(t(O))$ (np. $(x)fx$) lub $t(t(O),t(O))$ (np. $(x)Kfxgx$), lub $t(t(O,O))$ (np. $(x)(y)fxy$), lub $t(O,t(O))$ (np. $(Ex)fxy$) itd., zależnie od tego, ile argumentów ma wyrażenie i do jakich typów kategorii semantycznych pierwszego rzędu należą te argumenty. Kategorie semantyczne wyrażeń, w których argumenty należą do kategorii semantycznych rzędu pierwszego, zaliczamy do rzędu drugiego. Do odpowiednich typów tego samego rzędu zaliczamy zdania uzyskane przez specjalizację dokonaną na zmiennych funkcyjnych oraz funkcje prawdziwościowe wyrażeń rzędu drugiego.

Generalizując wyrażenie z zakresu kategorii semantycznej rzędu drugiego przez kwantyfikator wiążący funkcję propozycjonalną (np. $(Ef)(x)fx$) otrzymujemy zdanie, które przestało być funkcją funkcji propozycjonalnej; jeżeli jednak zgeneralizowane wyrażenie zawiera funkcję związanej kwantyfikatorem funkcji propozycjonalnej, to można je uważać z kolei za funkcję owej funkcji o kategorii semantycznej drugiego rzędu, a zatem za wyrażenie należące do kategorii semantycznej trzeciego rzędu. Wyniki dyskusji streszczają się przeto w regule: Generalizując funkcję o kategorii semantycznej n-tego rzędu, tzn. wiążąc w niej kwantyfikatorem zmienne o kategorii semantycznej n-1 rzędu, otrzymujemy zdanie, którego kategoria semantyczna jest rzędu $n+1$. Tezy teorii funkcji propozycjonalnych (313) mają przeto typy kategorii semantycznych $t(t(O))$, $t(t(O,O))$, $t(t(O), t(O))$ itp. rzędu drugiego, a tezy rozszerzonej teorii funkcji 323,1 — 323,8 — typy $t(t(t(O)))$ i $t(t(t(O,O)))$ rzędu trzeciego.

Jak wykazują powyższe uwagi, zdania nie tworzą jedynej kategorii semantycznej (122) ani nawet wszystkie kategorie semantyczne zdań nie są jednego

rzędu. Pociąga to za sobą w konsekwencji rozbicie jednolitości teorii zdań. Tezy teorii zdań są zdaniami, których kategoria semantyczna jest określona przez kategorię semantyczną argumentów zdaniowych. Każda przeto teza teorii zdań jest wyrażeniem wieloznacznym, mianowicie jest zdaniem tej lub innej kategorii semantycznej, zależnie od kategorii semantycznej zdań, dla których teoria została zbudowana. Otrzymujemy w ten sposób wielość teorii zdań dla zdań różnych kategorii semantycznych. Wszystkie te teorie są dokładnymi swoimi odbiciami: w każdej z nich powtarzają się dokładnie te same tezy, ponieważ (jak widzieliśmy zajmując się teorią zdań) wewnętrzna budowa zdania nie odgrywała tam żadnej roli. Dlatego też możemy zachować jednakową symbolikę dla owych rozmaitych teorii zdań, a tylko zwrócimy w odpowiedniej chwili uwagę na kategorię semantyczną tez, które będą omawiane.

Jeżeli kategoria semantyczna zmiennych zdaniowych w teorii zdań jest rzędu k, to tezy zwykłej teorii zdań należą również do kategorii semantycznych tego samego rzędu, są bowiem funkcjami prawdziwościowymi swoich argumentów, te zaś należą do tej samej kategorii semantycznej, co argumenty. Natomiast rząd kategorii semantycznej, do której należą tezy teorii zdań z kwantyfikatorami, jest o jedność wyższy i wreszcie rząd kategorii semantycznej dla tez prototetyki jest znów wyższy o jedność.

Część 4

Teoria orzeczników

Rozdział 1. Orzeczniki i związki między nimi

1. Funkcje orzecznikowe

Prowadzimy dalej analizę wewnętrznej budowy zdania rozpoczętą w części poprzedniej (311). Tam wzięliśmy pod uwagę rozróżnienie nazwy i funktora, obecnie wejdziemy głębiej w budowę funktora zdaniotwórczego. Niech jakaś funkcja propozycjonalna jednego argumentu nazwowego fx (np. x jest poetą) staje się dla pewnych wartości x zdaniem prawdziwym, dla innych — zdaniem fałszywym. Załóżmy, że dla wartości a zmiennej x zdanie fa jest prawdziwe (np. Dante jest poetą). Orzekając o a zdanie fa, stwierdzamy pewną w ł a s n o ś ć owego indywiduum, wspólną wszystkim indywiduom — i tylko tym — dla których fx zmienia się w zdanie prawdziwe; zarazem zaś indywiduum to zaliczamy do z a k r e s u funkcji fx (316). Funkcje propozycjonalne mają często postać f u n k c j i o r z e c z n i k o w e j: „x jest P", w której P nazywamy o r z e c z n i k i e m (taką jest np. funkcja: x jest poetą). Orzeczniki oznaczać będziemy w dalszym ciągu wielkimi literami P, Q, R, S pisząc funkcje orzecznikowe w postaci skróconej: Px, Qx itd. Zakładamy, że każdą funkcję propozycjonalną fx można przedstawić równoważnie w postaci funkcji orzecznikowej Px, czyli „x jest P"; P jest orzecznikiem dla wszystkich i tylko tych przedmiotów a, dla których fx staje się zdaniem prawdziwym:

411,1 $(f)(EP)E\,fx\,Px$

Tak np. funkcja propozycjonalna: x żywi się zwierzętami — jest równoważna funkcji orzecznikowej: x jest mięsożercą, jeżeli funkcja: x jest mięsożercą, jest prawdziwa dla tych i tylko tych wartości x, dla których funkcja: x żywi się zwierzętami, staje się zdaniem prawdziwym. Przedmioty, dla których P jest orzecznikiem, nazywają się desygnatami tego orzecznika; d e s y g n a t y o r z e c z n i k a P są scharakteryzowane przez to, iż posiadają własność odpowiadającą funkcji fx równoważnej funkcji orzecznikowej: x jest P. Zamiast „P jest orzecznikiem dla przedmiotów x", mówi się także „P jest nazwą ogólną dla przedmiotów x"; twierdzenie, że każdą funkcję propozycjonalną można przedstawić równoważnie w postaci funkcji orzecznikowej, sprowadza się

wówczas do twierdzenia, że dla przedmiotów posiadających pewną wspólną własność można dobrać nazwę ogólną. Poprawniej jednak postąpimy odróżniając orzeczniki od nazw i zachowując termin „nazwa" wyłącznie dla wartości zmiennej nazwowej, jak to czyniliśmy dotychczas (122). Kategoria semantyczna orzeczników jest różna od kategorii semantycznej nazw, orzeczniki nie mogą przeto występować jako wartości zmiennych nazwowych. Równoważność, przez którą wprowadziliśmy orzecznik *P*, określa sposób stosowania go wyłącznie w połączeniu *Px* i w tym jedynie połączeniu będziemy nadal posługiwać się orzecznikami, tzn. będziemy uważać za posiadające sens jedynie takie zawierające orzeczniki wyrażenia, które dają się sprowadzić do wyrażeń postaci *Px*.

Funkcja orzecznikowa (*Px*, *Qx* itd.) może być dwojako interpretowana: mianowicie bądź jako stwierdzenie, że *x* posiada własność *P*-owości, bądź że należy do klasy (zakresu) *P*-ów. Przyjmując którąkolwiek z tych interpretacji należy pamiętać, że wyrazy „własność" i „klasa" zostały wprowadzone w zwrotach „*x* posiada własność taką a taką", „*x* należy do klasy takiej a takiej" i że zwroty te określają sposób posługiwania się wspomnianymi wyrazami tak, iż będziemy uważali za posiadające sens jedynie takie wyrażenia o własnościach i klasach, które dają się sprowadzić do powyższej postaci. Wyrazy „własność", „klasa" należą do odrębnych kategorii semantycznych i tak jak orzeczniki nie mogą występować jako wartości zmiennych nazwowych. Dwa sposoby interpretacji funkcji orzecznikowych odpowiadają treściowemu i zakresowemu traktowaniu problemów w logice klasycznej. Mianowicie interpretując funkcje orzecznikowe w pierwszy sposób, mamy na myśli własność lub własności desygnatów należące do t r e ś c i (konnotacji) orzeczników. Interpretując je w drugi sposób bierzemy pod uwagę odpowiadający orzecznikom z a k r e s (denotację).

Wyrażenie „funkcja orzecznikowa" lub „*Px*" rozumiemy jako zmienną reprezentującą którekolwiek ze zdań, jakie powstają, gdy za zmienną nazwową *x* zostanie podstawiona wartość z jej zakresu zmienności. Wyrażenie to bywa jednak rozumiane także inaczej, jako funkcja w ogóle, w oderwaniu od jej wartości. Dla odróżnienia go w tym drugim znaczeniu kładzie się daszek nad *x*, pisząc „$P\hat{x}$" — można też napisać „*P*" z opuszczeniem argumentu. Ta bowiem „funkcja w ogóle" — to w interpretacji treściowej wprost „własność", w interpretacji zakresowej — „klasa". Daszek nad zmienną „$\hat{x}$" jest operatorem wiążącym zmienną i generalizującym wyrażenie „*Px*" w inny sposób, aniżeli sprawia to kwantyfikator ogólny.

2. Orzeczniki złożone

Wyrażeniami postaci „*x* jest *P*" (lub „*Px*") wolno posługiwać się, podobnie jak to było dla funkcji propozycjonalnych (311), jako zmiennymi zdaniowymi. Za pomocą funkcji prawdziwościowych logiki zdań definiuje się orzeczniki złożone, jak następuje:

1. Negacja orzecznika *P*: **N***Px* (czytamy „*x* jest nie *P*“)

412—I „**N***Px*“ = „*NPx*“

„*x* jest nie *P*“ znaczy „*x* nie jest *P*“ (lub „nieprawda, że *x* jest *P*“). Np. „*x* jest nieparzyste“, to tyle, co „*x* nie jest parzyste“.

2. Suma orzeczników *P S*, którą oznaczamy symbolem „**A***PSx*“ (czytamy „*x* jest *P* lub *S*“):

412—II „**A***PSx*“=„*APxSx*“

„*x* jest *P* lub *S*“ znaczy „*x* jest *P* lub *x* jest *S*“. Sumą orzeczników: kwadrat oraz romb, jest orzecznik: kwadrat lub romb, czyli czworobok równoboczny, inaczej „*x* jest czworobokiem równobocznym“, to tyle, co „*x* jest kwadratem lub jest rombem“.

N, **A** są funktorami argumentów orzecznikowych, odpowiadają one definicyjnie funktorom argumentów zdaniowych, *N*, *A*, lecz nie są z nimi identyczne, należą bowiem do innej kategorii semantycznej, dlatego oznaczamy je literami innego kroju; to samo dotyczy dalszych definicji.

3. Iloczyn orzeczników *P*, *S*, który oznaczamy symbolem „**K***PSx*“ i czytamy „*x* jest *P* i *S*“

412—III „**K***PSx*“=„*KPxSx*“

„*x* jest *P* i *S*“ to tyle, co „*x* jest *P* i *x* jest *S*“. Np. iloczynem orzeczników: czworobok równoboczny oraz czworobok prostokątny, jest orzecznik: czworobok równoboczny i prostokątny, czyli kwadrat.

4. Dysjunkcja orzeczników *P*,*S*:

412—IV „**D***PSx*“=„*DPxSx*“

„*x* jest *P* albo *S*“ to tyle, co „*x* jest *P* albo *x* jest *S*“. Np. dysjunkcją orzeczników: człowiek biały, człowiek nie-biały, jest orzecznik: człowiek biały albo nie-biały — czyli: człowiek.

5. Subsumcja orzeczników *P*, *S*: „**C***PSx*“, czytamy „*x*, które jest *P*, jest *S*“

412—V „**C***PSx*“=„*CPxSx*“

„*x*, które jest *P*, jest *S*“, to tyle, co „jeżeli *x* jest *P*, to *x* jest *S*“. Według tez 223,18 i 223,19 teorii zdań ostatnie wyrażenie przekształca się równoważnie na „*x* jest nie-*P* lub *x* jest *S*“; zgodnie z tym subsumcji orzeczników nadać można również postać „*x* jest nie-*P* lub *S*“. Np. subsumcją orzeczników: kwadrat, prostokąt, jest orzecznik: nie-kwadrat lub prostokąt, a zdania: „*x* jest nie-kwadratem lub prostokątem“, „*x*, które jest kwadratem, jest prostokątem“, „jeżeli *x* jest kwadratem, to *x* jest prostokątem“, są różnymi postaciami tej samej funkcji orzecznikowej.

6. Równoważność (ekwiwalencja) orzeczników *P*, *S*:

412—VI „**E***PSx*“=„*EPxSx*“

„tylko *x*, które jest *P*, jest *S*“, to tyle, co „zawsze i tylko, jeżeli *x* jest *P*, to *x* jest *S*“. Zgodnie zaś z tezą 226,10 teorii zdań równoważności orzeczników można nadać również postać orzecznika złożonego „nie-*P* lub *S* i nie-*S* lub *P*“.

Tak zatem równoważność orzeczników np.: trójkąt równoboczny, trójkąt równokątny, ująć można jako funkcję orzecznikową w jednej z trzech postaci: „Tylko *x*, które jest trójkątem równobocznym jest trójkątem równokątnym", „*x* jest trójkątem nierównobocznym lub równokątnym i nierównokątnym lub równobocznym", „zawsze i tylko, jeżeli *x* jest trójkątem równobocznym, *x* jest trójkątem równokątnym".

W języku potocznym nie ma spójników międzyorzecznikowych odpowiadających spójnikom międzyzdaniowym „jeżeli" oraz „zawsze i tylko jeżeli", gdy natomiast „i", „lub", „albo" są spójnikami zarówno międzyzdaniowymi, jak międzyorzecznikowymi.

7. Orzecznik uniwersalny: **U***x*, zdefiniowany przez tautologiczną funkcję prawdziwościową (241); do tego celu obieramy funkcję *APxNPx* (por. prawo wyłączonego środka, 223,19)

412-VII „**U***x*" = „*APxNPx*"

„*x* jest **U**" znaczy „*x* jest *P* lub *x* nie jest *P*" (czyli: *x* jest jakimkolwiek przedmiotem).

8. Orzecznik zerowy: **Z***x*, zdefiniowany przez funkcję prawdziwościową tautologicznie fałszywą (241); do tego celu obieramy funkcję *KPNp* (por. prawo sprzeczności 224,23)

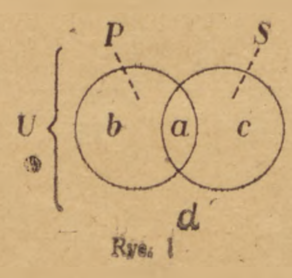
412-VIII „**Z***x*" = „*KPxNPx*"

„*x* jest **Z**" znaczy „*x* jest *P* i *x* nie jest *P*" (czyli: *x* nie jest niczym).

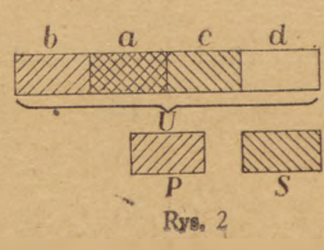
Orzecznikom złożonym odpowiadają w interpretacji treściowej własności złożone. Własności proste składają się na własności złożone, a sposób, w jaki to się dzieje, jest wskazany przez wyliczone wyżej połączenia orzecznikowe. Tak więc możemy mówić o własnościach, które są sumami, iloczynami itp. innych własności. Orzecznik **U** interpretujemy treściowo jako własność przysługującą każdemu przedmiotowi, **Z** w interpretacji treściowej to własność, która żadnemu przedmiotowi nie przysługuje.

Podobnie w interpretacji zakresowej zakresy złożone powstają z zakresów składowych, co uzmysławia schemat zbudowany, jak następuje:

Przypuśćmy, że mamy dwa zakresy *P*,*S*; dowolny przedmiot *x* może należeć bądź a) do jednego zarówno, jak i drugiego; b) jedynie do zakresu *P*; c) jedynie do zakresu *S*; d) ani do jednego, ani do drugiego. Ten stan rzeczy ilustruje każdy z umieszczonych poniżej rysunków, w których zakres wszyst-



Rys. 1



Rys. 2

kich przedmiotów podzielony jest na zakresy *a*, *b*, *c*, *d* według powyższego wyliczenia. Zakresy *P*, *S* oraz złożone budują się z zakresów *a*, *b*, *c*, *d* w podany niżej sposób:

1.	Zakres	*P*	składa się z *a*, *b*	10.	zakres	**E***PS*	składa się z *a*, *d*
2.	„	*S*	„ „ „ *a*, *c*	11.	„	**E***P***N***S*	„ „ „ *b*, *c*
3.	„	**N***P*	„ „ „ *c*, *d*	12.	„	**K***P***N***S*	„ „ „ *b*
4.	„	**N***S*	„ „ „ *b*, *d*	13.	„	**KN***PS*	„ „ „ *c*
5.	„	**A***PS*	„ „ „ *a*, *b*, *c*	14.	„	**KN***P***N***S*	„ „ „ *d*
6.	„	**K***PS*	„ „ „ *a*	15.	„	**U**	„ „ „ *a*, *b*, *c*, *d*
7.	„	**D***PS*	„ „ „ *b*, *c*, *d*	16.	„	**Z**	nie istnieje
8.	„	**C***PS*	„ „ „ *a*, *c*, *d*				
9.	„	**C***SP*	„ „ „ *a*, *b*, *d*				

Tezy teorii zdań przekształcają się na t e z y t e o r i i o r z e c z n i k ó w przez podstawienie wyrażeń orzecznikowych za zmienne zdaniowe, zastąpienie funkcji prawdziwościowych przez orzeczniki złożone według określeń 412-I—412-VIII oraz dołączenie kwantyfikatora ogólnego na początku wyrażenia w myśl dyrektywy wtórnej 2[1] (312). Otrzymane w ten sposób tezy teorii orzeczników są dwojakiego rodzaju:

a) Bądź nie zawierają funktorów prawdziwościowych, są przeto funkcjami orzecznikowymi z orzecznikami złożonymi i są tautologicznie prawdziwe dla wszelkich wartości zmiennych nazwowych, co dzieje się w ten sposób, iż występujący w takiej funkcji orzecznik jest orzecznikiem uniwersalnym. Tak np. teza 221,1 teorii zdań przekształca się według definicji 412-V na tezę

412,1 (*x*)**C***PPx*

słowami: Każde *x*, które jest *P*, jest *P*.
Orzecznik **C***PP* jest orzecznikiem uniwersalnym, co stwierdza się na rys. 1 lub 2 zważywszy, iż zakres przedmiotów, które by, będąc *P*, nie były *P*, nie istnieje.

Z tezy 223,17 według definicji 412-I i 412-II otrzymujemy tezę

412,2 (*x*)**A***P***N***Px*,

czyli: każde *x* jest *P* lub nie-*P*; tezy tej użyliśmy dla definicji orzecznika uniwersalnego.

b) Bądź zawierają funktory prawdziwościowe, których argumentami są wyrażenia orzecznikowe; tezy takie są przeto tautologicznie prawdziwymi związkami prawdziwościowymi między wyrażeniami orzecznikowymi. Np. teza 221,7 według definicji 412-VI daje tezę

412,3 (*x*)**CC***PQx***CC***QSx***C***PSx*

słowami: dla każdego *x*, jeżeli *x* które jest *P*, jest *Q*, to — jeżeli *x*, które jest *Q*, jest *S* — *x* które jest *P*, jest *S*. Jest to jedna z postaci prawa sylogizmu kategorycznego.

3,2 CpApq
4,2 CKpqp

Tezy 223,2 i 224,2 podobnie przekształcają się na

412,4 $(x)CPx\mathbf{A}PQx$,

inaczej: dla każdego x, jeżeli x jest P, to x jest P lub Q

412,5 $(x)C\mathbf{K}PQxPx$,

czyli: dla każdego x jeżeli x jest P i Q, to x jest P. Oba ostatnie twierdzenia są to prawa symplifikacji dla orzeczników.

Tezy 412,1 — 412,5 należą do kategorii semantycznych typów $t(t(O))$, $t(t(O),t(O))$ i $t(t(O),t(Ot(O))$ rzędu drugiego (324).

3. Stosunki treści i zakresów

Subsumcja orzeczników $\mathbf{C}SPx$ interpretowana treściowo brzmi: „x, które posiada własność S, posiada własność P". Logika klasyczna oddaje stosunek treści obu orzeczników zwrotem: „własność P zawiera się w (lub jest częścią) treści S" (lub: ta druga zawiera w sobie tamtą). Np. własność prostokątności zawiera się w treści orzecznika „kwadrat", to tyle, co „x, które jest kwadratem, jest figurą prostokątną".

Ta sama subsumcja interpretowana zakresowo ma brzmienie: x, które należy do zakresu S, należy do zakresu P". Logika klasyczna oddaje stosunek zakresów obu orzeczników w tym przypadku zwrotem: „zakres S jest częścią zakresu orzecznika P". Np. zakres kwadratów jest częścią zakresu prostokątów

Przeto

a) Zawsze i tylko jeżeli własność P zawiera się w treści orzecznika S, to zakres S jest częścią zakresu P.

Iloczyn orzeczników Sx, Px, czyli $\mathbf{K}SPx$, jest orzecznikiem, którego treść, w myśl tezy 412,5, zawiera w sobie treści obu orzeczników S, P, a którego zakres jest zarazem częścią zarówno zakresu S, jak zakresu P. Iloczyn $\mathbf{K}SPx$ nazywa się specjalizacją lub determinacją (uszczególnieniem) orzecznika S przez orzecznik P (lub orzecznika P przez orzecznik S). Np. treść iloczynu orzeczników: równoległobok i równoboczny, tj. równoległobok równoboczny, zawiera w sobie treść obu orzeczników; jego zakres jest częścią każdego z zakresów składowych.

Suma orzeczników Sx, Px, czyli $\mathbf{A}SPx$, jest orzecznikiem, którego treść, w myśl tezy 412,4, zawiera się w treści każdego z orzeczników Sx, Px i którego częściami zakresu są zakresy każdego z orzeczników Sx, Px. Np. treść orzecznika: kwadrat lub romb, czyli czworobok równoboczny, zawiera się w treści każdego z tamtych (bo kwadrat jest czworobokiem równobocznym prostokątnym, a romb czworobokiem równobocznym ukośnokątnym), zakres zaś kwadratów

jest częścią zakresu czworoboków równobocznych, zarówno jak zakres rombów. Sumę **A**SPx nazywa się generalizacją (uogólnieniem) orzecznika Sx przez orzecznik Px (lub Px przez Sx).

Związki powyższe ujmuje logika klasyczna w prawidło:

b) Specjalizacja rozszerza treść, zacieśnia zakres; generalizacja zacieśnia treść, rozszerza zakres.

Prawidła a) i b) noszą w logice klasycznej nazwę praw odwrotności treści i zakresu.

Wyrażenia „treść" i „zakres" orzeczników występują w powyższych określeniach w uwikłaniu. Nie określamy wprost, czym jest treść i zakres, określiliśmy jedynie pewne zwroty, w których wyrażenia te występują, i jedynie w tych zwrotach wolno nam się nimi posługiwać.

Stosunki między treściami orzeczników ujmują tzw. *praedicabilia* logiki klasycznej, przy pewnych założeniach merytorycznych nie należących już do logiki, lecz do tej szczegółowej dziedziny wiedzy, której terminami są odnośne orzeczniki. Niech treść orzecznika S zawiera w sobie własności P,Q,R,T,V. Desygnaty orzecznika S należą do zakresu badań jakiejś nauki i własności ich są częściowo takie same, jak własności innych przedmiotów należących do danego zakresu badań, częściowo zaś odmienne. Uchwycenie tych podobieństw i różnic jest zadaniem szczególnej wagi dla poznania desygnatów orzecznika S. Spostrzegłszy np. egzemplarz nieznanej mi rośliny, którą chcę poznać, opisuję ją tak, iż szukam, do jakiej ze znanych mi roślin jest ona najbardziej podobna oraz czym od tamtej się różni. Dzielę przeto własności P,Q,R,T,V na dwie grupy. Do pierwszej zaliczam te, które charakteryzują podobieństwa między desygnatami orzecznika S oraz dobrze znanymi mi desygnatami innego zbliżonego orzecznika S_1; do drugiej pozostałe, tzn. te, którymi desygnaty S różnią się od desygnatów S_1. Własnościami wspólnymi desygnatom orzeczników S i S_1 niech będą P,Q,R: nazywa się je rodzajowymi, a orzecznik G, którego treść zawiera w sobie te i tylko te własności, rodzajem (*genus*) dla orzeczników S i S_1, które są jego gatunkami (*species*). Pozostałe własności zawierające się w treści orzecznika S, tj. T,V, tworzą różnicę gatunkową D (*differentia specifica*) dla gatunku S ze względu na rodzaj G. Między gatunkiem S i rodzajem G oraz różnicą gatunkową D zachodzą stosunki **C**SG, **C**SD, tzn. zarówno treść rodzaju, jak treść różnicy, zawierają się w treści gatunku. Gatunek jest równoważny iloczynowi rodzaju i różnicy gatunkowej: **E**S**K**GD. Natomiast nie może być tak, by któraś własność należała do treści zarówno rodzaju, jak różnicy gatunkowej. Wszelkie inne prócz G i D własności zawierające się w treści orzecznika S (a więc np. **K**PQ, jakaś własność W zawierająca się w treści T itp.) noszą nazwę właściwości (*proprium*) dla gatunku S wobec rodzaju G, tak np. właściwością kwadratu zdefiniowanego jako prostokąt (rodzaj) równoboczny (różnica) jest równość i prostopadłość obu jego prze-

kątnych. Własności, którymi różnią się między sobą desygnaty pewnego orzecznika jako gatunku, nazywają się cechami przypadkowymi *(accidens)* w stosunku do tego orzecznika. Jeżeli orzecznik ujmiemy jako rodzaj względem innych gatunków (podrzędnych), to pewne z cech przypadkowych obejmą rolę różnic gatunkowych, tak np. własności *T*, *V* tworzące różnicę gatunkową dla gatunku *S* w obrębie rodzaju *G*, są w stosunku do orzecznika *G* cechami przypadkowymi. Rodzaj, różnica gatunkowa i właściwości są, w przeciwstawieniu do cech przypadkowych, cechami istotnymi dla gatunku, spomiędzy nich zaś rodzaj i różnica są cechami konstytutywnymi (określającymi), właściwości — cechami konsekutywnymi (pochodnymi).

Orzeczniki **Z** i **U** leżą poza zakresem praedicabiliów, a w szczególności **Z** nie jest gatunkiem względem żadnego rodzaju, **U** nie jest rodzajem względem żadnego gatunku. **Z** nie może być gatunkiem, ponieważ nie istnieją desygnaty tego orzecznika (mówiąc językiem metafizyki Arystotelesa, gatunki i rodzaje — to formy, które istnieją tylko w przedmiotach indywidualnych). **U** nie jest zaś rodzajem względem żadnego gatunku, lecz jest orzecznikiem transcendentalnym względem wszystkich gatunków i rodzajów *(omnia genera transcendit)*, albowiem nie można dobrać do **U** różnicy gatunkowej, która by nie miała z nim własności wspólnej — co, jak wyżej powiedziano, jest warunkiem koniecznym utworzenia gatunku dla danego rodzaju; **U** zawiera się bowiem w treści dowolnego orzecznika.

Charakterystyka stosunków między zakresami — oparta na pojęciu części jak wyżej — nie daje systematycznego ich przeglądu, nie każde bowiem dwa zakresy dają się według niej ze sobą porównać. Przegląd taki daje charakterystyka oparta na schemacie wzajemnego położenia zakresów. Mianowicie dwa zakresy *S*, *P* mogą być położone względem siebie bądź tak, iż istnieją indywidua *x*, które należą do *a*) **K***SP*, *b*) **K***S***N***P*, c) **KN***SP*, *d*) **KN***S***N***P*, bądź tak, iż brak pewnych zakresów spomiędzy *a*), *b*), *c*), *d*). Umieszczona niżej tablica 413,1 podaje wszelkie możliwe przypadki wzajemnego położenia dwóch zakresów *S*, *P*. Znak „/" w rubrykach **K***SP*, **K***S***N***P*, **KN***SP*, **KN***S***N***P* wskazuje, iż pewne indywidua należą do odnośnego zakresu (zakres istnieje), znak „—" wskazuje, iż żadne indywidum do danego zakresu nie należy (zakres nie istnieje).

Spośród wymienionych w tablicy 16 różnych przypadków wzajemnego położenia dwóch zakresów 7 opatrzonych nazwami zachodzi, gdy zakresy *S*, *P* są jakiekolwiek, byle różne od **Z** i **U**, dalszych 8 jedynie pod warunkiem, iż przynajmniej jeden z obu zakresów jest **Z** lub **U**, ostatni zaś nigdy nie zachodzi, ponieważ zawiera sprzeczność. W logice klasycznej bierze się pod uwagę jedynie stosunki między zakresami różnymi od zakresów **Z** i **U**, przeto mówiąc później o stosunkach między zakresami będziemy mieli na myśli jedynie owych 7, które spełniają ten warunek.

a KSP	b KSNP	c KNSP	d KNSNP	Nazwa stosunku	Przykład lub objaśnienie	Wykres U			
|	|	|	|	Niezależność	S- żołnierz P- Polak	c	a	b	d
—	|	|	|	Przeciwieństwo	S- owad P- ptak	c	d	b	b
|	—	|	|	Podrzędność	S- kwadrat P- prostokąt	a	a	c	d
|	|	—	|	Nadrzędność	S- prostokąt P- kwadrat	a	a	b	d
|	|	|	—	Podprzeciwieństwo	S- liczba całkowita [illegible] od 5 P- liczba pierwsza	b	a	a	c
—	—	|	|	———	S jest Z P- człowiek	c	c	d	d
—	|	—	|	———	S- człowiek P jest Z	d	d	b	b
—	|	|	—	Sprzeczność	S- człowiek P- nieczłowiek	b	b	c	c
|	—	—	|	Równoważność	S- czworobok P- czworokąt	a	a	d	d
|	—	|	—	———	S- człowiek P jest U	a	a	c	c
|	|	—	—	———	S jest U P- człowiek	b	a	a	b
—	—	—	|	———	S jest Z P jest Z	d	d	d	d
—	—	|	—	———	S jest Z P jest U	c	c	c	c
—	|	—	—	———	S jest U P jest Z	b	b	b	b
|	—	—	—	———	S jest U P jest U	a	a	a	a
—	—	—	—	———	S jest Z i U P jest Z i U	Wykresu nie ma Przypadek sprzeczny			

P S

Ryc. 3

Rozdział 2. Funkcje orzecznikowe z kwantyfikatorami

1. Generalizacja funkcji orzecznikowych

Funkcje orzecznikowe podlegają generalizacji przez kwantyfikatory (311) wiążące zmienne nazwowe. Dołączając kwantyfikator przekształcamy funkcję orzecznikową na zdanie. Zdanie „$(x)Px$“ czytamy „dla każdego x: x jest P“; zdanie zaś „$(Ex)Px$“ — „dla pewnego x: x jest P“ lub „istnieją x takie, iż x jest P“, lub wreszcie „istnieją P“.

Za pomocą kwantyfikatorów można scharakteryzować orzecznik uniwersalny i orzecznik zerowy. Zastąpmy w tezie 313,2 $(x)AfxNfx$ funkcję propozycjonalną fx funkcją orzecznikową Px, następnie wyrażenie $APxNPx$

według definicyj 412-I i 412-II przez $\mathbf{APNP}x$, a wreszcie to ostatnie wyrażenie przez $\mathbf{U}x$ według definicji 412-VII, to otrzymujemy tezę

421,1 $(x)\mathbf{U}x$,

czyli: Dla każdego x: x jest $\mathbf{U}$. Teza 421,1 charakteryzuje funkcję propozycjonalną z orzecznikiem uniwersalnym jako tautologię ze względu na zmienną nazwową (241).

W podobny sposób z tezy 314,2 $N(Ex)KfxNfx$ z powołaniem się na definicje 412-I, 412,-III i 412-VIII wynika teza

421,2 $N(Ex)\mathbf{Z}x$,

czyli: Nieprawda, iż dla pewnego x: x jest $\mathbf{Z}$. Teza 421,2 charakteryzuje funkcję orzecznikową z orzecznikiem zerowym jako funkcję tautologicznie fałszywą ze względu na zmienną nazwową (241).

Według tez 315,3 i 315,4 tezy 421,1 i 421,2 przekształcają się na

421,3 $N(Ex)\mathbf{NU}x$ 421,4 $(x)\mathbf{NZ}x$,

czyli $\mathbf{NU}x$ jest orzecznikiem zerowym, a $\mathbf{NZ}x$ jest orzecznikiem uniwersalnym lub, innymi słowy, orzecznik zerowy jest negacją orzecznika uniwersalnego, a orzecznik uniwersalny jest negacją orzecznika zerowego.

Podstawmy w prawie symplifikacji 221,2 $CqCpq$ funkcje orzecznikowe $q/\mathbf{U}x$, p/Sx, zastąpmy w myśl definicji 412-V $CSx\mathbf{U}x$ przez $\mathbf{C}S\mathbf{U}x$ i zwiążmy zmienną x kwantyfikatorem ogólnym, który, według tezy 313,6 $C(x)CfxgxC(x)fx(x)gx$, może być przeniesiony pod znak implikacji, to otrzymamy $C(x)\mathbf{U}x(x)\mathbf{C}S\mathbf{U}x$, skąd wobec 421,1 przez oderwanie wynika

421,5 $(x)\mathbf{C}S\mathbf{U}x$,

czyli: Dowolny zakres S jest częścią zakresu uniwersalnego. Podobnie z tezy 222,6 $CNpCpq$, podstawiając $p/\mathbf{Z}x\,q/Sx$ można wywnioskować z powołaniem się na 421,4, iż

421,6 $(x)\mathbf{CZ}Sx$,

czyli: Zakres zerowy jest częścią jakiegokolwiek zakresu S.

Wśród innych orzeczników należy wyróżnić orzeczniki jednostkowe, czyli takie, które posiadają jeden tylko desygnat, np. „najwyższy szczyt Tatr". Orzecznik jednostkowy nazywa się określnikiem lub deskrypcją swojego desygnatu. Wyrażenie Oa, w którym O jest określnikiem, a zaś nazwą jedynego jego desygnatu, wyróżnia a spośród wszystkich indywiduów jako jedyne, które jest O. Wyrażenie takie definiuje się za pomocą stosunku identyczności jako równoznaczne ze stwierdzeniem: Dla każdego x: x jest O zawsze i tylko, jeżeli x jest a:

421-I „Oa" = „$(x)EOxIxa$"

Np. zdanie „Garłuch jest najwyższym szczytem Tatr", wyróżniające Garłuch spośród wszystkich szczytów tatrzańskich, jeden bowiem tylko jest między

nimi najwyższy, jest w myśl powyższej definicji równoznaczne ze zdaniem: Dla każdego x: x jest najwyższym szczytem Tatr zawsze i tylko, jeżeli x jest Garłuchem.

Jeżeli nie wiadomo, jaki jest jedyny desygnat określnika, definiujemy funkcję „Ox" przez następujące warunki: 1. dla pewnego y: y jest O (orzecznik O nie jest orzecznikiem zerowym), 2. dla każdego z: jeżeli z jest O, to z jest identyczne z x (orzecznik O posiada tylko jeden desygnat). Oba te warunki obejmuje określenie:

421-II „Ox" = „$K(Ey)Oy(z)COzIxz$"

Np. „Jedyny wojownik pozostał z plemienia Mohikanów", to tyle, co „pewne indywiduum jest ostatnim Mohikaninem i każde indywiduum, które jest ostatnim Mohikaninem, jest z nim identyczne".

Definicje 421-I i 421-II są przykładami bardzo ważnej metody, która pojęcie jedyności definiuje przez identyczność.

2. Zdania kategoryczne

Funkcje orzecznikowe z kwantyfikatorami służą do analizy różnych typów zdań języka potocznego i logiki klasycznej. Zajmijmy się najpierw zdaniami kategorycznymi dwuczłonowymi, których logika klasyczna rozróżnia cztery typy: a) „każde S jest P", czyli „SaP"; b) „żadne S nie jest P", czyli „SeP"; c) „niektóre S są P", czyli „SiP"; d) „niektóre S nie są P", czyli „SoP". Dzieli się je na ogólne i szczegółowe, twierdzące i przeczące. Podział pierwszy nosi nazwę podziału według ilości *(quantitas)*, podział drugi jest podziałem według jakości *(qualitas)* zdania. W zdaniach wyliczonych typów stwierdza się pewien związek między dwoma orzecznikami S, P; orzeczniki występujące w zdaniu nazywają się terminami; termin znajdujący się na pierwszym miejscu w podanych wyżej sformułowaniach (S), czyli termin, o którym się orzeka, nazywa się podmiotem zdania *(subiectum)*, termin na drugim miejscu (P), czyli termin, który się orzeka, nazywa się orzeczeniem *(praedicatum)*.

Zakres zdań kategorycznych ogranicza się w logice klasycznej do tych jedynie, których terminy dają się ująć w *praedicabilia*, przeto ani **Z**, ani **U** nie może być terminem w zdaniu. Ograniczenie to wiąże się z założeniem epistemologii Arystotelesa, według którego wiedza naukowa dotyczy ogólnych, tj. gatunkowych, własności przedmiotów indywidualnych, orzekamy przeto w zdaniach kategorycznych o gatunkach przedmiotów indywidualnych — ich rodzaje, różnice, właściwości i cechy przypadkowe. Aby to sprecyzować, stawiamy na czele logiki klasycznej aksjomat

422,1 $(S)(Ex)Sx$,

tzn. dla każdego orzecznika S istnieje takie x, iż x jest S.

Aksjomat ten jest sformułowaniem w języku logiki zasady metafizycznej, podstawowej dla teorii nauki u Arystotelesa, która głosi, że formy, gatunki i rodzaje (*S*) istnieją tylko w przedmiotach indywidualnych (*x*). Wyklucza on **Z** jako termin jakiegokolwiek zdania; wyklucza też **U**, bo zakres zmienności zmiennej *S* obejmuje negacje orzeczników, gdybyśmy więc wprowadzili **U**, musielibyśmy wprowadzić orzecznik zerowy **NU** wbrew aksjomatowi. Aksjomat 422,1 pełni rolę istotną. Jeżeli bowiem usuniemy ograniczenie wyrażone w tym aksjomacie, to zdania ogólne stają się dwuznaczne, a niektóre twierdzenia logiki klasycznej — fałszywe.

W zdaniu ogólnym twierdzącym: każde *S* jest *P* — związek między *S* i *P* jest tego rodzaju, iż jeżeli jakieś *x* jest *S*, to zarazem jest ono *P*; definiujemy przeto zdanie ogólne twierdzące jako implikację formalną funkcji propozycjonalnych: *x* jest *S*, *x* jest *P* — dla wszelkich wartości *x*.

422-I „*SaP*" = „(*x*)*CSxPx*"

„Każde *S* jest *P*", znaczy „dla każdego *x*: jeżeli *x* jest *S*, to *x* jest *P*".

Przy uwzględnieniu definicji 412-V można definicję poprzednią przekształcić na

422-II „*SaP*" = „(*x*)**C***SPx*"

„Każde *S* jest *P*", znaczy „każde *x*, które jest *S*, jest *P*".

Wreszcie przydatna jest inna jeszcze forma przedstawienia zdania ogólnego twierdzącego; implikacja: dla każdego *x*, jeżeli *x* jest *S*, to *x* jest *P* — jest równoważna zdaniu: nie istnieje *x*, które jest *S* i nie *P* (por. tezy 224,26, 224,27, 315,3, 315,4, z których przez odpowiednie przekształcenia otrzymujemy równoważność wyrażeń (*x*)**C***SPx* i *N*(*Ex*)**K***S***N***Px*); definicję 422-II można dzięki temu zastąpić przez

422-III „*SaP*" = „*N*(*Ex*)**K***S***N***Px*"

„Każde *S* jest *P*", to tyle, co „nie istnieje *x*, które jest *S* i nie-*P*". Takie rozumienie zdania ogólnego twierdzącego, jakie przyjęliśmy w definicji 422-III, nazywać będziemy jego interpretacją egzystencjalną; definicja 422-II podaje interpretację subsumcyjną; interpretacją implikacyjną wreszcie będziemy nazywać rozumienie zdania ogólnego twierdzącego jako implikacji według definicji 422-I.

Jak wyżej wspomniano, jeżeli odrzucimy aksjomat 422,1, to zdanie ogólne twierdzące staje się dwuznaczne. Przy jednym znaczeniu znaczy ono to samo, co w logice klasycznej, nazywamy je wtedy zdaniem ogólnym twierdzącym mocnym; przedstawiając je w formule symbolicznej trzeba jednak teraz

wyraźnie napisać, że wykluczamy terminy zerowe, tak iż zdanie to jest koniunkcją twierdzenia, iż istnieją S i subsumcji **C**SPx. W miejsce definicji 422-I, 422-II i 422-III wchodzą teraz przeto definicje:

422-IV „SaP" = „$K(Ex)Sx(x)CSxPx$"

422-V „SaP" = „$K(Ex)Sx(x)$**C**SPx"

422-VI „SaP" = „$K(Ex)SxN(Ex)$**K**S**N**Px"

W drugim znaczeniu pomijamy założenie egzystencjalne $(Ex)Sx$, tak iż dopuszczamy terminy zerowe; zdanie ogólne twierdzące w tym znaczeniu nazywamy słabym; nadto dla odróżnienia od zdania mocnego w wyrażeniu słownym znak kwantyfikatora „każde... jest" zamieniamy na „wszelkie..... jest...". Tak przeto dla zdania ogólnego twierdzącego słabego definicja brzmi:

422-VII „Wszelkie S *jest* P" = „$(x)CSxPx$"

422-VIII „*Wszelkie* S *jest* P" = (x)**C**SPx"

422-IX „*Wszelkie* S *jest* P" = „$N(Ex)$**K**S**N**Px"

Definiens w definicjach 422-VII-VIII-IX ma postać tę samą, co w definicjach 422-I-II i III, lecz sens odmienny wobec odrzucenia aksjomatu 422,1.

W tym ogólniejszym od klasycznego ujęciu zdań ogólnych twierdzących zdaniem mocnym jest np. zdanie „każdy owad jest zwierzęciem", zdaniem słabym zdanie np. „wszelkie kwadratowe koło jest kwadratem". Także tezy 421,5 i 421,6 są zdaniami ogólnymi twierdzącymi słabymi.

Zdanie ogólne przeczące: żadne S nie jest P — uważamy za równoznaczne ze zdaniem ogólnym twierdzącym o terminach S, **N**P: każde S jest nie-P. Definicja zdania ogólnego przeczącego w interpretacji implikacyjnej brzmi przeto:

422-X „SeP" = „$(x)CSxNPx$",

„Żadne S nie jest P", znaczy, „jeżeli x jest S, to x nie jest P"; w interpretacji subsumcyjnej:

422-XI „SeP" = „(x)**C**S**N**Px"

„Każde x, które jest S, jest nie-P";
w interpretacji zaś egzystencjalnej:

422-XII „SeP" = „$N(Ex)$**K**SPx"

„Nieprawda, że dla pewnego x, x jest S i P".
Jeżeli wychodzimy poza logikę klasyczną, należy odróżnić również tutaj zdanie mocne od zdania słabego; mamy w interpretacji subsumcyjnej:

Zdanie mocne: 422-XIII: „*Żadne S nie jest* P" = „$K(Ex)Sx(x)$**C**S**N**Px"
i analogicznie dla interpretacji implikacyjnej oraz egzystencjalnej.

Zdanie słabe: 422-XIV „*Żadne S nie jest* P" = „(x)**C**S**N**Px"

zdania generalne
zdania kolektywne
„wszyscy polacy tworzą naród polski"
zd. dystrybutywne

Zdanie szczegółowe twierdzące logiki klasycznej: niektóre S są P — oddajemy w interpretacji implikacyjnej przez „nieprawda, że dla każdego x: jeżeli x jest S, to x nie jest P" — w interpretacji subsumcyjnej przez „nieprawda, że dla każdego x: x, które jest S, jest nie-P" — w interpretacji egzystencjalnej przez „dla pewnych x: x jest P i x jest S" — co odpowiadą definicjom:

422-XV „SiP" = „$N(x)CSxNPx$"
422-XVI „SiP" = „$N(x)\mathbf{C}S\mathbf{N}Px$"
422-XVII „SiP" = „$(Ex)\mathbf{K}SPx$"

Przejście od definicji 422-XV do 422-XVI odbywa się przez definicje 412-I i 412-V; od definicji 422-XVI do 422-XVII na zasadzie tez 315,1 oraz 224,24 i 224,25.

Zdanie szczegółowe twierdzące zawiera kwantyfikator szczegółowy i niezależnie od aksjomatu 422,1 stwierdza się w nim istnienie desygnatów orzecznika S. Także przeto poza aksjomatem 422,1 nie powstaje dwuznaczność, jaka w obrębie zdań ogólnych każe rozróżnić zdania mocne i słabe. Zdanie szczegółowe twierdzące jest w logice klasycznej negacją zdania ogólnego przeczącego i rozumiemy je jako „przynajmniej niektóre ...", nie zaś „tylko niektóre...". Przy ogólniejszym ujęciu zdań ogólnych (tzn. przy odrzuceniu aksjomatu 422,1) zdanie szczegółowe twierdzące jest negacją zdania ogólnego przeczącego słabego, natomiast nie jest negacją zdania ogólnego przeczącego mocnego; gdy S jest orzecznikiem zerowym, to zarówno zdania ogólne przeczące mocne, jak i szczegółowe twierdzące są fałszywe; negacja zdania ogólnego przeczącego mocnego jest alternatywą $A(x)\mathbf{N}Sx(Ex)\mathbf{K}SPx$; jeżeli S jest orzecznikiem zerowym, to prawdziwy jest pierwszy człon tej alternatywy „$(x)\mathbf{N}Sx$".

Analogicznie zdanie szczegółowe przeczące logiki klasycznej — niektóre S nie są P — oddajemy przez definicje:

422-XVIII „SoP" = „$N(x)CSxPx$" — w interpretacji implikacyjnej,
422-XIX „SoP" = „$N(x)\mathbf{C}SPx$" — w interpretacji subsumcyjnej,
422-XX „SoP" = „$(Ex)\mathbf{K}S\mathbf{N}Px$" — w interpretacji egzystencjalnej;

jest ono w logice klasycznej negacją zdania ogólnego twierdzącego, a przy ogólniejszym pojmowaniu zdań ogólnych — negacją zdania ogólnego twierdzącego słabego, nie jest natomiast negacją zdania ogólnego twierdzącego mocnego, gdyż oba te zdania, gdy podmiotem jest orzecznik zerowy, stają się fałszywe.

Omawiając zdanie ogólne przeczące: żadne S nie jest P, ustaliliśmy, że jest ono równoznaczne ze zdaniem ogólnym twierdzącym o zaprzeczonym orzeczeniu: każde S jest nie-P, podobnie zaś zdanie szczegółowe przeczące uznaliśmy za równoznaczne ze zdaniem szczegółowym twierdzącym

o zaprzeczonym orzeczeniu: niektóre *S* są nie-*P*. Niektórzy logicy rozróżniali zdania przeczące i zdania twierdzące o zaprzeczonym orzeczeniu, nazywając te drugie zdaniami nieskończonymi (*propositiones infinitae* u Boethiusa) lub limitującymi, czyli ograniczającymi; zasadą odróżniającą miało być to, iż zdania twierdzące i limitujące rozumiano jako mocne, zdania przeczące jako słabe. Kant rozróżnia zdania limitujące i przeczące na tej podstawie, iż zdania twierdzące stwierdzają rzeczywistość (tzn. możliwość lub aktualność) przedmiotu; zdania przeczące — jego nierzeczywistość; zdanie limitujące: każde *S* jest nie-*P* — stwierdza przeto rzeczywistość przedmiotów *S*, które są nie-*P*, ograniczając zakres przedmiotów *S* do tych właśnie (stąd nazwa zdania limitującego); zdanie przeczące: żadne *S* nie jest *P* — stwierdza nierzeczywistość przedmiotów *S*, które byłyby *P*. Wymieniona różnica jest różnicą znaczeniową, intencjonalną (211), leży przeto poza granicami logiki w przyjętym przez nas znaczeniu.

Logicy, którzy rozróżniają zdania nieskończone i zdania przeczące, nazywają obwersją lub infinitacją przekształcenie zdania przeczącego na równoważne nieskończone lub odwrotnie. Tak zatem przez infinitację przekształca się zdanie postaci „żadne *S* nie jest *P*" na „każde *S* jest nie-*P*" i zdanie postaci „niektóre *S* nie są *P*" na zdanie „niektóre *S* są nie-*P*" lub odwrotnie. Uogólniając zaś to postępowanie także na zdania twierdzące, przekształca się je przez infinitację na równoważne przeczące o orzeczeniu zaprzeczonym: „każde *S* jest *P*" na „żadne *S* nie jest nie-*P*" oraz „niektóre *S* są *P*" na „niektóre *S* nie są nie-*P*".

3. Uzupełnienie tablicy zdań kategorycznych

Dla zupełności rozważań dotyczących zdań kategorycznych logiki klasycznej okazuje się celowym uzupełnić ich liczbę czwórką zdań analogicznych o podmiocie zaprzeczonym tak, aby terminy *S*, *P* występowały we wszelkich kombinacjach z negacją i bez niej. Jeżeli zdania logiki klasycznej oznaczymy w znany sposób literami *a*, *e*, *i*, *o*, to niech odpowiednio litery kreskowane oznaczają zdania o podmiocie zaprzeczonym, jak następuje:

a' zdanie ogólne twierdzące: każde nie-*S* jest *P*

e' zdanie ogólne przeczące: żadne nie-*S* nie jest *P*.

i' zdanie szczegółowe twierdzące: niektóre nie-*S* są *P*

o' zdanie szczegółowe przeczące: niektóre nie-*S* nie są *P*.

Poniższa tablica wymienia osiem tak uzyskanych odmian zdań kategorycznych, podając je w interpretacji implikacyjnej, subsumcyjnej i egzystencjalnej.

Tablica 423-I

Nazwa	Skrót	Brzmienie	Interpretacja		
			implikacyjna	subsumcyjna	egzystencjalna
ogólne twierdzące	*a*	każde *S* jest *P*	$(x)CSxPx$	$(x)\mathbf{C}SPx$	$N(Ex)\mathbf{K}S\mathbf{N}Px$
ogólne przeczące	*e*	żadne *S* nie jest *P*	$(x)CSxNPx$	$(x)\mathbf{C}S\mathbf{N}Px$	$N(Ex)\mathbf{K}SPx$
szczegółowe twierdzące	*i*	niektóre *S* są *P*	$N(x)CSxNPx$	$N(x)\mathbf{C}S\mathbf{N}Px$	$(Ex)\mathbf{K}SPx$
szczegółowe przeczące	*o*	niektóre *S* nie są P	$N(x)CSxPx$	$N(x)\mathbf{C}SPx$	$(Ex)\mathbf{K}S\mathbf{N}Px$
Zdania o [illegible] zaprzeczonym					
ogólne twierdzące	*a'*	każde nie-*S* jest *P*	$(x)CNSxPx$	$(x)\mathbf{CN}SPx$	$N(Ex)\mathbf{KN}S\mathbf{N}P$
ogólne przeczące	*e'*	żadne nie-*S* nie jest *P*	$(x)CNSxNPx$	$(x)\mathbf{CN}S\mathbf{N}Px$	$N(Ex)\mathbf{KN}SPx$
szczegółowe twierdzące	*i'*	niektóre nie-*S* są *P*	$N(x)CNSNPx$	$N(x)\mathbf{CN}Sx\mathbf{N}Px$	$(Ex)\mathbf{KN}SPx$
szczegółowe przeczące	*o'*	niektóre nie-*S* nie są *P*	$N(x)CNSxPx$	$N(x)\mathbf{CN}SPx$	$(Ex)\mathbf{KN}S\mathbf{N}Px$

Do powyższej tablicy odnoszą się następujące jeszcze uwagi:

Zdania ogólne są w interpretacji implikacyjnej i subsumcyjnej twierdzącymi, w interpretacji egzystencjalnej — przeczącymi; zdania szczegółowe są twierdzącymi w interpretacji egzystencjalnej, przeczącymi — w dwóch innych.

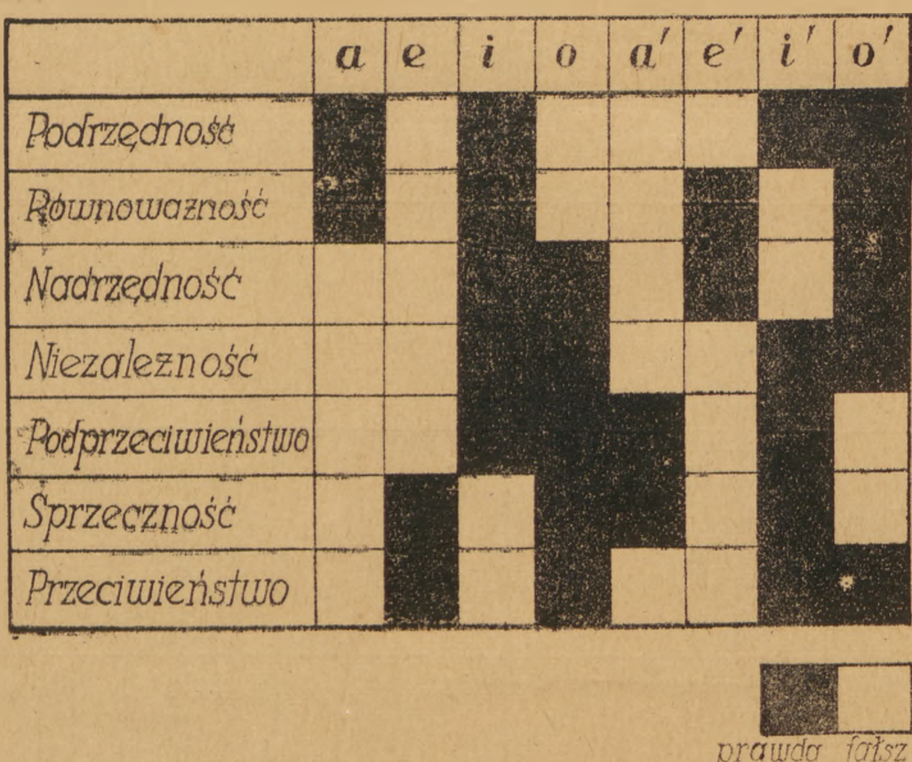
Zdania ogólne twierdzące i szczegółowe przeczące w interpretacji egzystencjalnej, a natomiast ogólne przeczące i szczegółowe twierdzące w interpretacji implikacyjnej i subsumcyjnej mają orzeczenie *P* zaprzeczone, pozostałe nie. Zdania ogólne twierdzące w interpretacji egzystencjalnej, a szczegółowe twierdzące w implikacyjnej i subsumcyjnej są przeto zdaniami o podwójnej negacji, jedna jest negacją zdania jako całości, druga negacją orzeczenia.

Każde zdanie zawarte w tablicy 423-I jest wieloznaczne w tym sensie, iż jest prawdziwe zawsze i tylko, gdy między zakresami *S*, *P* zachodzą niektóre ze stosunków z tabl. 413,I. Łatwo zauważyć, iż warunki podane dla określenia stosunków między orzecznikami w rubrykach *a*—*d* tablicy 413,I są równoważne zdaniom z tablicy 423-I, tak np. zakres **K**SP istnieje (warunek *a*) zawsze i tylko, gdy prawdą jest zdanie: niektóre *S* są *P* (zdanie *i*), zakres **K**SP nie istnieje zawsze i tylko, gdy prawdą jest: żadne *S* nie jest *P* (zdanie *e*) itp. Każdy przeto stosunek między dwoma zakresami jest określony przez koniunkcję czterech zdań z tablicy 423-I. Tablica 423,I podaje zestawienie prawdziwości „/" i fałszywości „—" zdań dla różnych stosunków.

Tablica 423,1

Zdanie	Podrzędność	Równoważność	Nadrzędność	Niezależność	Podprzeciwieństwo	Sprzeczność	Przeciwieństwo
a	/	/	—	—	—	—	—
e	—	—	—	—	—	/	/
i	/	/	/	/	/	—	—
o	—	—	/	/	/	/	/
a'	—	—	—	—	/	/	—
e'	—	/	/	—	—	—	—
i'	/	—	—	/	/	/	/
o'	/	/	/	/	—	—	/

Rys. 4 uzmysławia związki z tablicy 423,1 dla wszystkich ośmiu rodzajów zdań.



Rys. 4

4. Zdania jednostkowe określnikowe

Zdania jednostkowe dwuczłonowe, podmiotowo-orzeczeniowe, mieszczą się poza rodzajami zdań kategorycznych, o których wyżej była mowa, i są dwojakie. W jednych podmiotem jest nazwa np. „Adam był pierwszym człowiekiem". Są to zdania proste, nazwaliśmy je zdaniami atomowymi (122), otrzymujemy je z funkcji propozycjonalnych fx drogą specjalizacji, kładąc za zmienną x nazwę a jako określoną wartość zmiennej; zdanie atomowe ma przeto postać „fa". W drugich podmiotem jest określnik, nazywamy je zdaniami określnikowymi. Określnik nie jest nazwą, nie może być przeto wartością zmiennej nazwowej w funkcji propozycjonalnej fx i zdanie określnikowe nie da się przedstawić w postaci „fa". Nie jest ono zdaniem prostym, lecz ma budowę złożoną, odmienną w każdym z trzech następujących przypadków: a) gdy indywiduum będące jedynym desygnatem określnika jest znane, b) gdy jest ono określone, lecz nieznane, c) gdy jest nieokreślone.

W przypadku a) zdanie określnikowe postaci „PO" („O jest P, w pierwszej odmianie") jest prawdziwe zawsze i tylko, jeżeli I) O jest określnikiem pewnego przedmiotu indywidualnego a oraz II) a jest P. Warunek I formułujemy (por. 421-I) zwrotem $(x)EOxIxa$, tzn.: dla każdego x: zdanie „x jest O" jest równoważne ze zdaniem „x jest identyczne z przedmiotem a". Warunek II wyraża się w zdaniu atomowym Pa. Zgodnie z powyższym definiujemy zdanie „O jest P" przez koniunkcję zdań wyrażających warunki I i II:

424-I „PO" = „$K(x)EOxIxaPa$"

Np. „najwyższy szczyt Tatr jest turnią granitową" rozumiemy jako koniunkcję: dla każdego x: x jest najwyższym szczytem Tatr zawsze i tylko, jeżeli x jest Garłuchem i Garłuch jest turnią granitową.

W przypadku b) konieczne i wystarczające warunki prawdziwości zdania określnikowego PO („O jest P, w drugiej odmianie") są następujące:

I) dla pewnego x prawdą jest że Ox, czyli $(Ex)Ox$;

II) tylko dla jednej wartości x prawdą jest, że Ox, czyli $(x)(y)CKOxOyIxy$ (dla każdego x i dla każdego y: jeżeli Ox i Oy, to x jest identyczne z y);

III) dla każdego x: jeżeli Ox, to Px, czyli $(x)COxPx$. Stąd definicja zdania określnikowego w tym przypadku:

424-II „PO" = „$KK(Ex)Ox(x)(y)CKOxOyIxy(x)COxPx$"

Np. „następny papież będzie 264 papieżem z kolei", to tyle, co: „I) dla pewnego x prawdą będzie, że x będzie następnym papieżem; II) tylko dla jednej wartości x będzie prawdą, że x będzie następnym papieżem; III) ktokolwiek będzie następnym papieżem, będzie 264 papieżem z kolei".

W przypadku c) nieokreśloność indywiduum sprawia, że nie ma sposobu stwierdzenia jego jedyności, zdanie określnikowe tego typu, np. „jakiś blondyn przywitał mnie u wejścia", rozumiemy jako równoważnik koniunkcji „dla

pewnego x: x jest blondynem i x przywitał mnie u wejścia". Definiujemy zgodnie z powyższym zdanie „PO" („O jest P, w trzeciej odmianie", czyli „jakieś O jest P"):

424-III „PO" = „$(Ex)KOxPx$"

Zdanie określnikowe którejkolwiek z trzech wyszczególnionych wyżej odmian jest fałszywe w przypadku, gdy przynajmniej jeden z jego składników jest fałszywy, tz. gdy bądź nie ma desygnatu określnika, bądź desygnatów tych jest więcej niż jeden (w przypadkach a i b), bądź gdy indywiduum dane przez określnik nie posiada własności orzeczonej w zdaniu określnikowym. Tak np. fałszywe są trzy zdania: a) jedyny syn króla Zygmunta Augusta był ostatnim Jagiellonem (bo Zygmunt August nie miał syna); b) jedyny syn Kazimierza Jagiellończyka był po nim królem polskim (bo Kazimierz Jagiellończyk miał więcej synów); c) najstarszy syn Kazimierza Jagiellończyka żył 91 lat (bo nie żył tyle).

Szczególnie ważny jest przypadek pierwszy (brak desygnatu), ponieważ pozwala na wyjaśnienie zdań o przedmiotach nieistniejących czyli fikcyjnych. Przedmiot fikcyjny nie jest w ogóle żadnym indywiduum, przeto ani rzekoma nazwa takiego przedmiotu nie jest nazwą, ani rzekoma jego deskrypcja nie jest deskrypcją. Istnieją jednak orzeczniki zerowe mające postać deskrypcji, takim jest np. „Hamlet", przy czym wyraz ten rozumiemy jako „książę duński, bohater tragedii Szekspira". Orzeczniki tego rodzaju pozwalają formułować zdania postaci „Hamlet jest osobą fikcyjną", które uważamy za równoznaczne ze zdaniem przeczącym „nieprawda, że dla pewnego x: x jest Hamletem". W zdaniu takim przeto jest mowa nie o przedmiocie fikcyjnym zwanym Hamletem, lecz o orzeczniku „Hamlet", o którym orzekamy, że jest orzecznikiem zerowym (421,2). Każde zaś inne zdanie, którego podmiotem jest wyraz „Hamlet", jest zdaniem fałszywym, ponieważ nie ma przedmiotu, który by był desygnatem tak brzmiącego określnika. Spotykamy się tutaj z pewną pozorną trudnością; mianowicie weźmy pod uwagę dwa zdania: I. „Hamlet umarł w młodym wieku", II. „Hamlet nie umarł w młodym wieku". Są to dwa zdania o Hamlecie, a zatem oba są według tego, co zostało powiedziane, fałszywe. Zarazem jednak są one (wskazuje na to ich budowa) dwoma zdaniami sprzecznymi, a więc, według zasady wyłączonego środka, jedno z nich jest prawdziwe. Otóż tak byłoby, gdyby to były dwa zdania proste atomowe o podmiocie „Hamlet": tak jednak nie jest, ponieważ nie ma takiego indywiduum. Trzeba oba zdania rozumieć inaczej i jedynie odpowiednia jest tutaj taka ich analiza, według której są one dwoma fałszywymi zdaniami określnikowymi, a mianowicie niech będzie:

a) (Ex)(x jest Hamletem),

b) $(x)(y)CK$(x jest Hamletem) (y jest Hamletem) Ixy,

c) $(x)C$(x jest Hamletem) (x umarł młodo),

d) $(x)C$(x jest Hamletem) (x nie umarł młodo).

Zdanie I jest równoznaczne z koniunkcją *KKabc*, zdanie II — z koniunkcją *KKabd*, przy czym zdanie *a*) jest fałszywe, zdania zaś *b*), *c*), *d*) — prawdziwe jako implikacje formalne o poprzedniku fałszywym przy każdej wartości *x*, resp. *x* i *y*.

Rozdział 3. Logika klasyczna

1. Opozycja zdań

Między zdaniami kategorycznymi logiki klasycznej wraz ze zdaniami o podmiocie zaprzeczonym zachodzą następujące związki, (zdania oznaczamy symbolami „*a*", „*e*", „*i*", „*o*", „*a*'", „*e*'", „*i*'", „*o*'",):

431,1 *CaNo* 431,3 *CNoa*
431,2 *CoNa* 431,4 *CNao*

Zdanie *a* jest równoważne negacji zdania *o*, zdanie *o* — równoważne negacji zdania *a*. Logika klasyczna nazywa stosunek między zdaniami *a*, *o* sprzecznością *(oppositio contradictoria)*.

431,5 *CeNi* 431,7 *CNie*
431,6 *CiNe* 431,8 *CNei*

Każde ze zdań *e*, *i* jest negacją drugiego z nich. Zachodzi między nimi również stosunek sprzeczności.

431,9 *CaNe* 431,10 *CeNa*

Związki 431,9 i 431,10 są równoważne dysjunkcji między zdaniami *a*, *e* (por. 225,1 i 225,2). Logika klasyczna nazywa stosunek między tymi zdaniami stosunkiem przeciwieństwa *(opp. contraria)*.

431,11 *Cai* 431,12 *Ceo*

Między zdaniami *a*, *i* oraz *e*, *o* zachodzi implikacja. Logika klasyczna nazywa ten stosunek podporządkowaniem *(subalternatio)*.

431,13 *CNio* 431,14 *CNoi*

Związki 431,13 i 431,14 są równoważne alternatywie między zdaniami *i*, *o* (223,16 i 223,17). Logika klasyczna nazywa ten stosunek podprzeciwieństwem *(opp. subcontraria)*.

Tezy 431,1 — 431,14 łatwo sprawdzić na rys. 3 (423). Tak np. związek *CaNe* widoczny jest stąd, iż zdanie *a* jest prawdziwe tylko dla stosunków podrzędności i równoważności między terminami zdania, natomiast dla sto-

sunków tych zdanie *e* jest fałszywe; podobnie związek *Cai* sprawdza się w ten sposób, iż dla stosunków podrzędności i równoważności, dla których zdanie *a* jest prawdziwe, także zdanie *i* jest prawdziwe; związek zaś *CNio* widoczny jest stąd, iż *Ni* jest prawdziwe dla sprzeczności i przeciwieństwa, dla których także *o* jest prawdziwe itp.

Stosunki przeciwieństwa, sprzeczności i podprzeciwieństwa między zdaniami są analogiczne do tak samo nazwanych stosunków między zakresami terminów. Analogia ta staje się naoczna przez porównanie wykresów dla stosunków między terminami z tablicy 413,1 z rysunkiem 3 (423) uzmysławiającym na odcinkach stosunki między zdaniami.

Aby przeprowadzić dowód tez 431,1 — 431,8, należy wykazać, że zdanie *o* jest negacją zdania *a* oraz zdanie *i* negacją zdania *e*. Stwierdziliśmy to już przy sposobności szukania formuły dla zdań ogólnych i szczegółowych, powołując się na tezy 224,26 i 224,27 teorii zdań, oraz 315,1 i 315,2 teorii funkcji propozycjonalnych. Podobnie też tezy 431,9 — 431,14 dają się udowodnić na podstawie tez teorii zdań i teorii funkcji propozycjonalnych, przy czym po udowodnieniu tezy 431,9 otrzymamy z niej 431,10 przez transpozycję, z tez 431,9 i 431,10 następnie 431,11 i 431,12 bacząc, że *i* jest *Ne*, zaś *o* jest *Na* — i w podobny sposób także 431,13 i 431,14. Dowód tezy 431,9 opiera się na tezie 222,12 *CCpqCCpNqNp*, którą przekształcamy na tezę teorii funkcji propozycjonalnych podstawiając *p/fx*, *q/gx* oraz wiążąc zmienną *x* kwantyfikatorem ogólnym: *(x)CCfxgxCCfxNgxNfx*. Wprowadźmy z kolei funkcje orzecznikowe *fx/Sx*,*gx/Px* oraz zastąpmy według definicji 412-I i 412-V „*CSxPx*" przez „**C***SPx*" i „*CSxNPx*" przez „**C***S***N***Px*" oraz „*NSx*" przez „**N***Sx*", a zarazem wprowadźmy kwantyfikator ogólny do wnętrza implikacji według tezy 313,6, tak iż otrzymujemy *C(x)***C***SPxC(x)***C***S***N***Px(x)***N***Sx* — stosujemy prawo transpozycji do wewnętrznej implikacji, a następnie prawo komutacji hipotez; zarazem dla skrócenia piszemy „*a*" zamiast „*(x)* **C***SPx*" oraz „*e*" zamiast „*(x)***C***S***N***Px*" mamy przeto *C(Ex)SxCaNe*, skąd odrywamy poprzednik równokształtny aksjomatowi 442,1 (kwantyfikator *(S)* może być dołączony bez zmiany sensu wyrażenia, por. 312, dyrekt. 2'), aby otrzymać w rezultacie tezę 431,9, którą mieliśmy udowodnić.

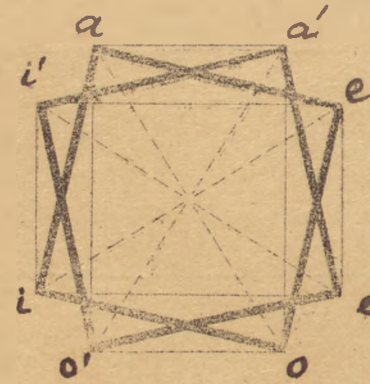
Tezy 431,1 — 431,14 charakteryzują stosunki opozycji między zdaniami *a, e, i, o*; ilustrację graficzną tych stosunków daje wykres zwany kwadratem logicznym (rys. 5).

W całym zakresie ośmiu rodzajów zdań kategorycznych powtarzają się stosunki kwadratu logicznego czterokrotnie. Mianowicie:
sprzeczność zachodzi między zdaniami *a-o,e-i,a'-o',e'-i'*;
przeciwieństwo zachodzi między zdaniami *a-e,a-a',a'-e',e'-e*;
podporządkowanie zachodzi między zdaniami *a-i,a'-i',e-o,e'-i,a-o',a'-o,e-i',e'-o'*;
podprzeciwieństwo zachodzi między zdaniami *i-o,i-i',o-o',i'-o'*;

Cztery kwadraty logiczne *aeio*, *a'e'i'o'*, *aa'o'o*, *ee'i'i* uzmysławia rys. 6.



Rys. 5



Rys. 6

Tezy odpowiadające wszystkim powyższym stosunkom dają się sprawdzić na tablicy 423,1 i na rys. 4 (423). Dowody ich są analogiczne do dowodów tez poprzedzających, z tym zastrzeżeniem, że w miejsce tezy 323,12 wchodzi w nie teza 222,11 *CCpqCCNpqq*.

2. Odwracanie zdań

Odwróceniem prostym *(conversio simplex)* zdania nazywa się w logice klasycznej jego przekształcenie polegające na przestawieniu jego podmiotu i orzeczenia. Tak np. zdanie „każde *S* jest *P*" daje przez odwrócenie proste „każde *P* jest *S*", zdanie zaś „niektóre *S* są *P*" daje „niektóre *P* są *S*". Dla niektórych rodzajów zdań kategorycznych zachodzi między zdaniem i jego odwróceniem prostym implikacja, tak iż z prawdziwości zdania można wnioskować o prawdziwości jego prostego odwrócenia. Mówimy w takim przypadku, że odwrócenie proste jest dozwolone. Odwrócenie proste jest dozwolone jedynie dla zdań *e* oraz *i*, mamy bowiem (niech „*c*" przed literą oznaczającą zdanie znaczy odwrócenie proste tego zdania, np. „*ce*" — odwrócenie proste zdania *e*):

432,1 *Cece*
432,2 *Cici*

Odwrócenie proste zdań *e* oraz *i* jest przekształceniem odwracalnym, albowiem także

432,3 *Ccee*
432,4 *Ccii*

Dowody tez 432,1 — 432,4 uzyskamy biorąc z tablicy 423-1 zdania *e* resp. *i* w interpretacji implikacyjnej lub subsumcyjnej i stosując prawo transpozycji oraz podwójnego przeczenia albo też biorąc je w interpretacji egzystencjalnej

i stosując prawo przemienności (224,4 i 224,5) koniunkcji. Otrzymamy w pierwszym przypadku ze zdania *e*, czyli $(x)\mathbf{C}S\mathbf{N}Px$, zdanie $(x)\mathbf{C}P\mathbf{N}Sx$, w drugim przypadku ze zdania *e*, czyli $N(Ex)\mathbf{K}SPx$, zdanie $N(Ex)\mathbf{K}PSx$, a zatem w każdym przypadku również zdanie typu *e*, lecz z przestawionymi terminami; podobnie ze zdania *i* w pierwszej postaci $N(x)\mathbf{C}S\mathbf{N}Px$ zdanie $N(x)\mathbf{C}P\mathbf{N}Sx$, ze zdania *i* w drugiej postaci $(Ex)\mathbf{K}SPx$ zdanie $(Ex)\mathbf{K}PSx$, czyli również zdanie typu *i*, lecz z prze-stawionymi terminami.

Dla zdania *a* odwrócenie proste nie jest dozwolone, stosujemy zamiast niego tzw. odwrócenie przez ograniczenie (*conversio per accidens*), czyli przekształcenie zdania *a* na *ci*, będące rezultatem dwóch następujących po kolei przekształceń: przejścia od zdania *a* do podrzędnego mu zdania *i* według związku *Cai* (431,11) oraz odwrócenia prostego tegoż zdania *i*. Odwrócenie przez ograniczenie znajduje wyraz w tezię

432,5 *Caci*,

którą według prawa sylogizmu wyprowadzamy z tez 431,11 i 432,2 Odwrócenie przez ograniczenie nie jest odwracalne, tzn. implikacja odwrotna względem 432,5 nie zachodzi.

Zdanie *o* nie pozwala na zastosowanie ani odwrócenia prostego, ani odwrócenia przez ograniczenie.

Możemy jednak znaleźć regułę ogólną odwracania zdań wszystkich rodzajów, gdy zastosujemy postępowanie, które posłużyło nam przy odwracaniu prostym zdań *e* oraz *i* wychodząc od którejkolwiek interpretacji zdań kategorycznych. Wyjdźmy przeto od interpretacji egzystencjalnej zdań (tablica 423,2) i zastosujmy prawo przemienności koniunkcji, wskutek czego otrzymujemy dla każdego rodzaju zdanie równoważne mu z przestawionymi terminami, jak następuje:

Tablica 432,6

Zdanie		odwraca się równoważnie na		prawo odwrócenia
a	$N(Ex)\mathbf{K}S\mathbf{N}Px$	$N(Ex)\mathbf{KN}PSx$	*ce'*	*Eace'*
e	$N(Ex)\mathbf{K}SPx$	$N(Ex)\mathbf{K}PSx$	*ce*	*Eece*
i	$(Ex)\mathbf{K}SPx$	$(Ex)\mathbf{K}PSx$	*ci*	*Eici*
o	$(Ex)\mathbf{K}S\mathbf{N}Px$	$(Ex)\mathbf{KN}PSx$	*ci'*	*Eoci'*
a'	$N(Ex)\mathbf{KN}S\mathbf{N}Px$	$N(Ex)\mathbf{KN}P\mathbf{N}Sx$	*ca'*	*Ea'ca'*
e'	$N(Ex)\mathbf{KN}SPx$	$N(Ex)\mathbf{K}P\mathbf{N}Sx$	*ca*	*Ee'ca*
i'	$(Ex)\mathbf{KN}SPx$	$(Ex)\mathbf{K}P\mathbf{N}Sx$	*co*	*Ei'co*
o'	$(Ex)\mathbf{KN}S\mathbf{N}Px$	$(Ex)\mathbf{KN}P\mathbf{N}Sx$	*co'*	*Eo'co'*

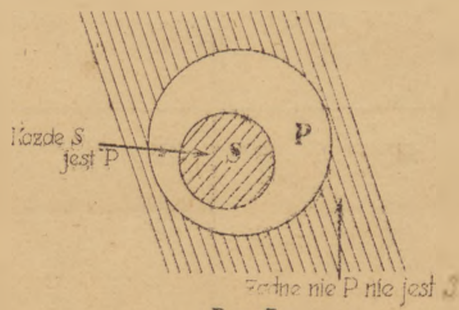
Wyniki zapisane w ostatniej rubryce nasuwają następujące uwagi: Zdania *e* oraz *i* odwracają się równoważnie w sposób prosty, jak to zostało już poprzednio stwierdzone w tezach 432,1 — 432,4; tak samo w sposób prosty odwracają się zdania *a*′ oraz *o*′. Zdanie *a*, dla którego mieliśmy nierównoważne odwrócenie przez ograniczenie, odwraca się równoważnie na zdanie *e*′, zdanie *o*, dla którego poprzednio nie znaleźliśmy odwrócenia, odwraca się na *i*′. Oba te odwrócenia noszą u niektórych autorów nazwę odwróceń przez k o n t r a p o z y c j ę i są traktowane jako połączenie dwóch przekształceń: zdanie odwracane najpierw przekształca się przez obwersję na zdanie przeciwnej jakości o zaprzeczonym orzeczeniu, *a* na *e*, zaś *o* na *i*, następnie owo nowe zdanie odwraca się w sposób prosty, wskutek czego termin zaprzeczony znajdzie się w podmiocie. Tak samo przez kontrapozycję odwraca się zdanie ę′ na *a* oraz *i*′ na *o*.

Odwracanie zdań ilustrujemy na schematach Eulera, jak np.:

a) *Eace* ′*S* podrzędne do *P* „*a*“ = = „*N*(*Ex*)**K***S***N***Px*“

„ce“ = „*N*(*Ex*)**KN***PSx*“

Oba zdania „każde *S* jest *P*“ oraz „żadne nie-*P* nie jest *S*“ stwierdzają, że zakresy *S* i nie-*P* nie mają części wspólnej (rys. 7).

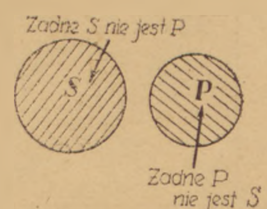


Rys. 7

b) *EeceS* przeciwne do *P* „*e*“ = „*N*(*Ex*)**K***SPx*“

„*ce*“ = *N*(*Ex*)**K***PSx*“

Oba zdania „żadne *S* nie jest *P*“ oraz „żadne *P* nie jest *S*“ stwierdzają, że zakreskowane zakresy *S* i *P* nie mają części wspólnej (rys. 8).



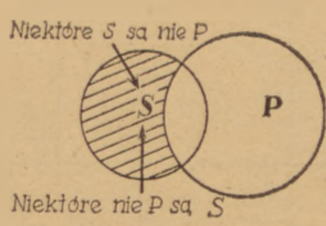
Rys. 8

c) *Eoci*′ *S* niezależne względem *P*:

„*o*“ = (*Ex*)**K***S***N***Px*“

„*ci*′“ = „(*Ex*)**KN***PSx*“

Oba zdania „niektóre *S* nie są *P*“ oraz „niektóre nie-*P* są *S*“ stwierdzają, że zakresy *S* i nie-*P* posiadają część wspólną (zakreskowaną, rys. 9).



Rys. 9

Odwracając zdanie *a* przez kontrapozycję na zdanie *e*′, następnie powtórnie odwracając otrzymane zdanie *e*′ przez ograniczenie na zdanie *o*′ otrzymujemy

przekształcenie zwane przez niektórych autorów (Keynes) inwersją; przekształca ono zdanie *a* na o'

432,7 Cao'

Np.: zdanie „każde dziecko jest ciekawe" daje przez inwersję „niektóre nie-dzieci nie są ciekawe".

Podobnie możemy zastosować inwersję do zdania *e* odwracając je wprost, a następnie powtórnie z ograniczeniem: $CCeeCCcei'Cei'$, inwersja przekształca przeto zdanie *e* na i'

432,8 Cei'

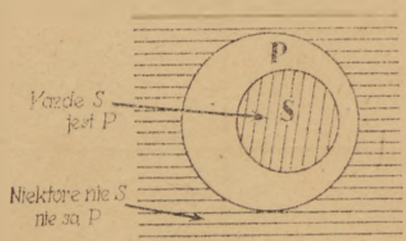
Np. „żaden harcerz nie kłamie" przekształca się przez inwersję na „niektórzy nie-harcerze kłamią".

Ogólnie przeto inwersja jest związkiem, który pozwala na przejście od zdania ogólnego do zdania szczegółowego przeciwnej jakości o zaprzeczonym podmiocie. Dla zdań szczegółowych inwersja nie jest możliwa, zdanie szczegółowe o podmiocie *S* nie pozwala nic stwierdzić o jakimkolwiek zdaniu z podmiotem *NS*. Związki inwersji można odczytać wprost z tablicy 423,1 lub rys. 4 (423) podobnie, jak odczytywaliśmy z tej tablicy lub z rys. 3 związki opozycji między zdaniami. Związki inwersji znamy również już z rozszerzonego kwadratu logicznego (rys. 6) jako związki podrzędności. Oprócz wymienionych są to jeszcze:

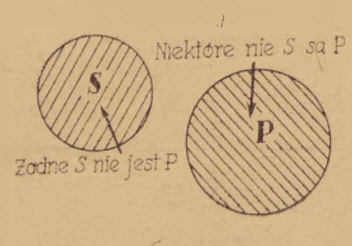
432,9 $Ca'o$

432,10 $Ce'i$

Związki inwersji ilustruje graficznie rys. 10 i 11.



Rys. 10



Rys. 11

3. Sylogizmy

Naukę o sylogizmie wywodzi się w logice klasycznej z *dictum de omni et de nullo* (por. 212 oraz 312). Stosuje się je jednak tutaj inaczej niż wówczas, gdy przytaczaliśmy je w związku z dyrektywą podstawiania. Mianowicie rozumie się je tutaj jako interpretację tezy 221,7 (zob. niżej 433,29), jak następuje: Jeżeli o przedmiotach *M* prawdziwe jest prawo ogólne bądź w postaci

twierdzącej (*de omni*: każde *M* jest *P*), bądź w postaci przeczącej (*de nullo*: żadne *M* nie jest *P*) i jeżeli pewne przedmioty *S* bądź wszystkie są *M*, bądź niektóre są *M*, to o każdym *S* w pierwszym przypadku, a o niektórych w drugim prawdziwe jest owo prawo ogólne. Tak rozumiane *dictum* daje cztery rodzaje związków, zależnie od tego, czy prawo ogólne jest twierdzące, czy przeczące i czy o wszystkich, czy o niektórych *S* orzekamy *M* (zdania oznaczamy w zwykły sposób literami „*a*", „*e*", „*i*", „*o*" pisząc je między literami oznaczającymi podmiot i orzeczenie zdania):

433,1 *CMaPCSaMSaP*
433,2 *CMePCSaMSeP*
433,3 *CMaPCSiMSiP*
433,4 *CMePCSiMSoP*

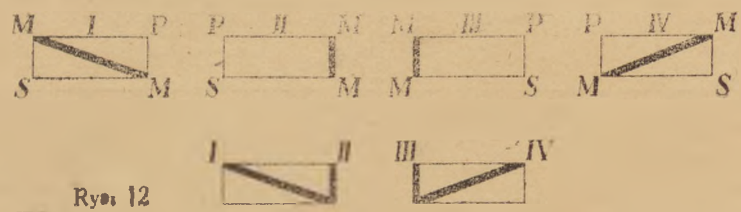
Dwie pierwsze postaci sylogizmu mające w następniku zdanie ogólne pozwalają na zastosowanie *dictum* po raz drugi (*CSaPCSiSSiP*), skąd dostajemy dwie dodatkowe jeszcze formy zwane podrzędnymi lub osłabionymi (*subalternatae*):

433,5 *CMaPCSaMSiP*
433,6 *CMePCSaMSoP*

Zastosowanie *dictum* wymaga wprowadzenia trzech zdań, z których pierwsze nazywa się przesłanką większą, drugie przesłanką mniejszą, trzecie konkluzją sylogizmu. W owych trzech zdaniach znajdują się trzy terminy, każdy dwukrotnie i w dwóch różnych zdaniach. Termin występujący w podmiocie konkluzji (*subiectum S*) nazywa się terminem mniejszym (tzn. o mniejszym zakresie); termin występujący w orzeczeniu konkluzji (*praedicatum P*) nazywa się terminem większym (tzn. o większym zakresie); termin, którego nie ma w konkluzji, natomiast jest w obu przesłankach nosi nazwę terminu średniego (*terminus medius M*); w przesłance większej występuje termin średni i termin większy, w przesłance mniejszej — termin mniejszy i termin średni, w konkluzji — termin mniejszy i termin większy.

Sześć wyszczególnionych wyżej sylogizmów — to sześć odmian, czyli trybów (*modi*), pierwszej figury. Figurą sylogizmu nazywamy schemat scharakteryzowany przez położenie terminu średniego w przesłankach; w figurze pierwszej termin średni jest podmiotem przesłanki większej i orzeczeniem przesłanki mniejszej. Tryby różnią się między sobą rodzajem (jakością i ilością) zdań tworzących przesłanki i konkluzję, w figurze pierwszej poszczególne tryby składają się ze zdań *aaa, eae, aii, eio, aai, eao*. Są one oznaczone nazwami mnemotechnicznymi, w których kolejne samogłoski wskazują przesłankę większą, mniejszą i konkluzję: *Barbara, Celarent, Darii, Ferio*. Dwa tryby podrzędne nie mają odrębnej nazwy klasycznej, jednakże czasem nazywane bywają *Barbari* i *Celaront*, by wskazać ich zależność od *Barbara* i *Celarent*.

Z trybów pierwszej figury uzyskuje się przez przekształcenia równoważne tryby trzech figur pozostałych, mianowicie w figurze drugiej termin średni jest orzeczeniem obu przesłanek, w figurze trzeciej — podmiotem obu przesłanek, w figurze czwartej — orzeczeniem większej i podmiotem mniejszej przesłanki. Dla zapamiętania tych stosunków pomocny jest następujący symbol wzrokowy:



Rys. 12

Sześć trybów figury drugiej otrzymuje się z trybów figury pierwszej przez przekształcenie zwane odwróceniem sylogizmu *(conversio syllogismi)*, a polegające na transponowaniu implikacji między przesłanką mniejszą i konkluzją według tezy 224,30, wskutek czego negacja konkluzji staje się przesłanką mniejszą, a negacja mniejszej przesłanki — konkluzją. W ten sposób przekształca się:

433,7	*Barbara*,	czyli	*CMaPCSaMSeP*	na	*CMaPCSoPSoM*,	czyli	*Baroco*
433,8	*Celarent*	„	*CMePCSaMSeP*	„	*CMePCSiPSoM*	„	*Festino*
433,9	*Darii*	„	*CMaPCSiMSiP*	„	*CMaPCSePSeM*	„	*Camestres*
433,10	*Ferio*	„	*CMePCSiMSoP*	„	*CMePCSaPSeM*	„	*Cesare*
433,11	*Barbari*	„	*CMaPCSaMSiP*	„	*CMaPCSePSoM*	„	*Camestros*
433,12	*Celaront*	„	*CMePCSaMSoP*	„	*CMePCSaPSoM*	„	*Cesaro*

Spomiędzy owych sześciu trybów dwa są, podobnie jak w pierwszej figurze, podrzędne, mianowicie: *Camestros* względem *Camestres* oraz *Cesaro* względem *Cesare*. Wskutek transpozycji zmieniła się rola terminów w stosunku do roli, którą miały w równoważnych trybach figury pierwszej: *P* stał się terminem średnim, *M* — terminem większym. Wszystkie tryby figury drugiej mają konkluzje przeczące, bo te są negacjami mniejszej przesłanki zawsze twierdzącej w trybach figury pierwszej.

Sześć trybów figury trzeciej otrzymuje się z trybów figury pierwszej przez odwrócenie sylogizmu, podobnie jak przy figurze drugiej, z tą różnicą, iż transponuje się przesłankę większą z konkluzją według tezy 224,31, mianowicie przekształca się:

433,13	*Barbara*,	czyli	*CMaPCSaMSaP*	na	*CSoPCSaMMoP*,	czyli	*Bocardo*
433,14	*Celarent*	„	*CMePCSaMSeP*	„	*CSiPCSaMMiP*	„	*Disamis*
433,15	*Darii*	„	*CMaPCSiMSiP*	„	*CSePCSiMMoP*	„	*Ferison*
433,16	*Ferio*	„	*CMePCSiMSoP*	„	*CSaPCSiMMiP*	„	*Datisi*
433,17	*Barbari*	„	*CMaPCSaMSiP*	„	*CSePCSaMMoP*	„	*Felapton*
433,18	*Celaront*	„	*CMePCSaMSoP*	„	*CSaPCSaMMiP*	„	*Darapti*

Wszystkie tryby trzeciej figury mają konkluzje szczegółowe, jako negacje większej przesłanki zawsze ogólnej w trybach pierwszej figury. Dwa z nich, *Felapton* i *Darapti*, mają obie przesłanki ogólne, konkluzję szczegółową, jak tryby podrzędne, z których powstają, same jednak nie są podrzędne względem żadnego z trybów pozostałych.

Wreszcie tryby czwartej figury otrzymamy z trybów figur poprzednich stosując odwrócenie proste tam, gdzie jest ono dopuszczalne, tzn. w zdaniach *e* oraz *i*:

Z pierwszej figury

a) przez odwrócenie obu przesłanek:

433,19 *Ferio*, czyli *CMePCSiMSoP* na *CPeMCMiSSoP*, czyli *Fresison*

b) przez odwrócenie konkluzji przy jednoczesnej komutacji obu przesłanek:

433,20 *Barbari*, czyli *CMaPCSaMSiP* na *CSaMCMaPPiS*, czyli *Bamalip*
433,21 *Celarent* „ *CMePCSaMSeP* „ *CSaMCMePPeS* „ *Calemes*
433,22 *Darii* „ *CMaPCSiMSiP* „ *CSiMCMaPPiS* „ *Dimatis*

Z drugiej figury

przez odwrócenie mniejszej przesłanki:

433,23 *Festino*, czyli *CMePCSiPSoM* na *CMePCPiSSoM*, czyli *Fresison*
433,24 *Camestres* „ *CMaPCSePSeM* „ *CMaPCPeSSeM* „ *Calemes*
433,25 *Camestros* „ *CMaPCSePSoM* „ *CMaPCPeSSoM* „ *Calemos*

Z trzeciej figury

przez odwrócenie większej przesłanki:

433,26 *Disamis*, czyli *CSiPCSaMMiP* na *CPiSCSaMMiP*, czyli *Dimatis*
433,27 *Ferison* „ *CSePCSiMMoP* „ *CPeSCSiMMoP* „ *Fresison*
433,28 *Felapton* „ *CSePCSaMMoP* „ *CPeSCSaMMoP* „ *Fesapo*

Łącznie zatem dla czwartej figury powstaje sześć trybów: *Bamalip*, *Calemes*, *Calemos*, *Dimatis*, *Fesapo*, *Fresison*, z których jeden, *Calemos*, jest podrzędny względem *Calemes*.

Wszystkich trybów sylogistycznych jest 24 podzielonych na cztery figury, po sześć w każdej; po odrzuceniu trybów podrzędnych pozostaje 19 trybów głównych, po cztery w pierwszej i drugiej figurze, sześć w trzeciej i pięć w czwartej. Wymienia je wiersz mnemotechniczny:

Barbara, Celarent, Darii Ferioque prioris,
Cesare, Camestres, Festino, Baroco secundae,
Tertia Darapti, Disamis, Datisi, Felapton
Bocardo, Ferison habet. Quarta insuper addit
Bamalip, Calemes, Dimatis, Fesapo, Fresison.
Quinque subalterni, totidem generalibus orti,
Nomen habent nullum, nec si bene colligis usum.

Wypiszemy raz jeszcze wszystkie tryby główne wraz z ich nazwami ujednostajniając litery i układając je w postaci tradycyjnej:

Barbara	*Celarent*	*Darii*	*Ferio*
M a P	*M e P*	*M a P*	*M e P*
S a M	*S a M*	*S i M*	*S i M*
S a P	*S e P*	*S i P*	*S o P*

Cesare	*Camestres*	*Festino*	*Baroco*
P e M	*P a M*	*P e M*	*P a M*
S a M	*S e M*	*S i M*	*S o M*
S e P	*S e P*	*S o P*	*S o P*

Darapti	*Disamis*	*Datisi*	*Felapton*	*Bocardo*	*Ferison*
M a P	*M i P*	*M a P*	*M e P*	*M o P*	*M e P*
M a S	*M a S*	*M i S*	*M a S*	*M a S*	*M i S*
S i P	*S i P*	*S i P*	*S o P*	*S o P*	*S o P*

Bamalip	*Calemes*	*Dimatis*	*Fesapo*	*Fresison*
P a M	*P a M*	*P i M*	*P e M*	*P e M*
M a S	*M e S*	*M a S*	*M a S*	*M i S*
S i P	*S e P*	*S i P*	*S o P*	*S o P*

W logice klasycznej wywodzi się z trybów figury pierwszej tryby pozostałych figur inaczej, aniżeli zostało to uczynione wyżej; dla każdego z trybów podaje się w tym celu odrębny przepis ujęty mnemotechnicznie w nazwie trybu. O znaczeniu samogłosek w nazwach trybów była mowa już wyżej. Ze spółgłosek posiada znaczenie litera początkowa oraz „*s*", „*p*", „*m*", „*c*" — inne „*b*", „*d*", „*r*", „*l*", „*n*", „*t*" służą tylko do uzupełnienia sylab. Wywód, czyli redukcja, sprowadza dany tryb do tego spomiędzy trybów pierwszej figury, który zaczyna się tą samą literą, np. *Dimatis* redukuje się do *Darii*; redukcja przebiega w ten sposób, iż z przesłanek danego trybu otrzymujemy przez przekształcenie wskazane w przepisie redukcji przesłanki, z których wynika konkluzja, według odnośnego trybu pierwszej figury; bądź ta konkluzja, bądź jej odwrócenie jest zarazem konkluzją badanego trybu. Litera „*m*" *(metathesis)* oznacza komutację przesłanek, „*s*" — odwrócenie proste *(conversio simplex)*, „*p*" — odwrócenie przez ograniczenie *(per accidens)*; litery te umieszczone są zawsze po samogłosce oznaczającej zdanie, które ma ulec odwróceniu. Jedynie dwa tryby, *Baroco* i *Bocardo*, redukują się inaczej, mianowicie litera „*c*" *(contrapositio syllogismi)* w ich nazwie wskazuje, że należy dokonać transpozycji między przesłanką oznaczoną przez samogłoskę, po której „*c*" następuje, oraz konkluzją, podobnie jak to czyniliśmy, aby uzyskać tryby drugiej i trzeciej figury z pierwszej.

Przykłady:

Disamis redukuje się do *Darii*, jak to wskazuje początkowa litera „*D*", z przesłanek *M i P* i *M a S*, gdy odwrócimy większą (*s*) i przestawimy je (*m*), wynikają przesłanki *M a S* i *P i M*, z tych według *Darii* otrzymujemy konkluzję *PiS*, z której wreszcie przez odwrócenie (*s*) wynika *SiP*. Przeto z *M i P* i *M a S* wynika konkluzja *S i P*, co dowodzi poprawności trybu *Disamis*.

Bamalip redukuje się do *Barbara*, jak wskazuje początkowa litera „*B*". Z przesłanek *PaM MaS* wynika, gdy je przestawiamy (*m*), *MaS*, *PaM*, z tych według *Barbara* dostajemy konkluzję *PaS* — tę odwracamy (*p*) na *SiP*, tak przeto ostatecznie z przesłanek *PaM*, *MaS* wynika konkluzja *SiP*, co dowodzi poprawności trybu *Bamalip*.

Fesapo redukuje się do *Ferio*. Z przesłanek *PeM*, *MaS* wynika przez odwrócenie ich (*s*, *p*) *MeP*, *SiM*, a z tych według *Ferio* *SoP*; przeto z przesłanek *PeM*, *MaS* dostaliśmy konkluzję *SoP*, co okazuje poprawność trybu *Fesapo*.

Redukcję przez kontrapozycję objaśnia się w sposób następujący: *Bocardo* redukuje się do *Barbara*. Przypuśćmy, że z przesłanek *MoP*, *MaS* nie wynika konkluzja *SoP*, tzn. przy pewnych *S*, *P* nieprawda, że *SoP*; prawdą jest przeto wtedy zaprzeczenie zdania *SoP*, mianowicie zdanie *SaP*. Lecz ze zdań *SaP*, *MaS* wynika według *Barbarą* konkluzja *MaP* będąca zaprzeczeniem przesłanki *MoP*. Wobec tego, że w trybie *Bocardo* założyliśmy przesłankę *MoP*, musi być *MaP* fałszywe, a także fałszywą musi być racja *SaP*, za pomocą której uzyskaliśmy *MaP*. Tak przypuszczenie, że z przesłanek *MoP*, *MaS* nie wynika konkluzja *SoP*, prowadzi do fałszu, skąd wniosek, że z przesłanek tych wynika *SoP*, a tak okazuje się prawidłowość trybu *Bocardo*.

Logika klasyczna formułuje prawa sylogizmu, prawom tym czyni zadość każdy sylogizm poprawny, zarazem zaś służą one do wykazania, że podane wyżej wyliczenie 24 trybów jest wyczerpujące. Prawa owe wymienia wiersz mnemotechniczny:

Distribuas medium, nec quartus terminus adsit,
Utraque nec praemissa negans, nec particularis,
Sectetur partem conclusio deteriorem
Et non distribuat nisi cum praemissa negetve.

W szczególności są one następujące:

a) Prawa dotyczące przesłanek:

I. Terminem średnim winien być termin identyczny w obu przesłankach (*nec quartus terminus adsit*) — błąd przeciwny temu prawidłu nosi nazwę *quaternio terminorum*, powstaje najczęściej wskutek dwuznaczności terminu średniego.

II. Termin średni winien być przynajmniej w jednej przesłance rozłożony (*distribuas medium*), termin jest rozłożony, czyli wzięty w całym zakresie,

jeżeli występuje bądź w podmiocie zdania ogólnego, bądź w orzeczeniu zdania przeczącego. Zgodnie z tym prawidłem nie mogą być np. w drugiej figurze przesłanki *aa*.

III. Dwie przesłanki przeczące, a tak samo dwie szczegółowe nie dają wniosku *(utraque nec praemissa negans, nec particularis)*.

b) Prawa dotyczące konkluzji:

IV. Konkluzja idzie za przesłanką słabszą *(sequitur partem conclusio deteriorem)*; szczegółowa jest słabsza od ogólnej, przecząca — słabsza od twierdzącej. Konkluzja może być przeto ogólna, tylko jeżeli obie przesłanki są ogólne, a twierdząca, tylko jeżeli obie przesłanki są twierdzące.

V. Termin może być rozłożony w konkluzji, tylko jeżeli był rozłożony w przesłance *(conclusio... non distribuat nisi cum praemissa)*. Prawidło to nie dozwala na uzyskanie w I figurze wniosku z przesłanek *ae*, bo konkluzja musiałaby być przecząca, a przeto mieć termin większy rozłożony, tymczasem w przesłance *a* termin większy jest nierozłożony; również w myśl tego prawidła przesłanki *aa* w trzeciej figurze *(Darapti)* i w czwartej figurze *(Bamalip)* nie dają konkluzji ogólnej, tylko szczegółową. Ogólność przesłanek nie jest przeto warunkiem wystarczającym dla uzyskania ogólnej konkluzji, trzeba nadto jeszcze, by termin mniejszy był w przesłance rozłożony.

VI. Konkluzja jest przecząca tylko, jeżeli jedna z przesłanek jest przecząca *(conclusio non neget... nisi cum praemissa)*. Przecząca przesłanka jest przeto warunkiem zarówno koniecznym, jak wystarczającym przeczącej konkluzji.

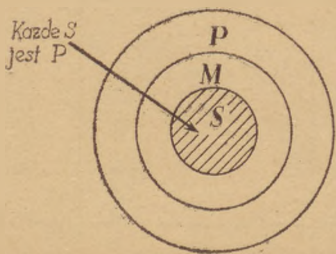
Wymienione prawa opisują stan rzeczy charakteryzujący tryby pierwszej figury. Ich ważność dla trybów figur pozostałych wykazać można dowodząc, że przekształcenia (transpozycja, odwrócenie proste, komutacja przesłanek), które prowadzą od pierwszej figury do następnych, pozostawiają owe prawa w mocy.

Dla przedstawienia sylogizmów na schematach Eulera wykreślamy zakresy trzech terminów tak, jak nakazują stosunki między nimi według danych przesłanek. Jeżeli obie przesłanki są twierdzące, to w konkluzji orzekamy o przedmiotach *S* należących do wspólnej części zakresów *SMP*. Jeżeli większa przesłanka jest przecząca, to w konkluzji orzekamy o przedmiotach *S* należących do wspólnej części zakresów *SMnieP* (bo wtedy mniejsza przesłanka twierdząca dotyczy tych *S*, które są *M*, i o tych stwierdza się w większej, że nie są *P*); jeżeli mniejsza przesłanka jest przecząca, to w konkluzji orzekamy o przedmiotach *S* należących do wspólnej części zakresów *SnieMnieP* (bo wtedy mniejsza przesłanka dotyczy tych *S*, które nie są *M*, a większa jest twierdząca i stwierdza, o przedmiotach *P*, że są *M*; *P* musi być rozłożone, bo jest rozłożone w przeczącej konkluzji — przedmioty *S*, które nie są *M*, przeto zarazem nie są *P*). Warunkiem otrzymania konkluzji z danych przesłanek jest, aby przy wszelkich położeniach *S*, *M*, *P*, na jakie dozwalają przesłanki, istniała

owa wspólna część zakresów; konkluzji natomiast nie ma, jeżeli schemat wzajemnego położenia zakresów *S*, *M*, *P* dozwala na takie ich rozmieszczenie, przy którym wspólna część *SMP* lub *SMnieP*, lub *SnieMnieP* — zależnie od przesłanek — nie istnieje. Konkluzja jest ogólna, jeżeli owa wspólna część obejmuje cały zakres *S*, szczegółowa — w przypadku przeciwnym.

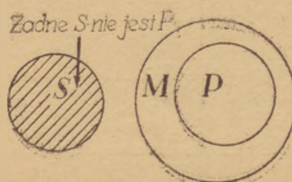
Przykłady schematów:

Barbara
istnieje wspólna część zakresów *SMP* i obejmuje cały zakres *S*.



Rys. 13

Camestres
istnieje wspólna część zakresów *SnieMnieP* i obejmuje cały zakres *S*.



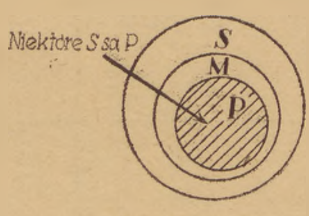
Rys. 14

Darapti
istnieje wspólna część zakresów *SMP* i obejmuje tylko część *S*.



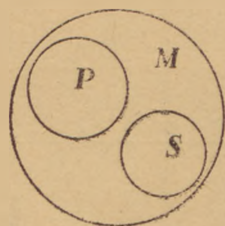
Rys. 15

Bamalip
istnieje wspólna część zakresów *SMP* i obejmuje **tylko część *S*.**



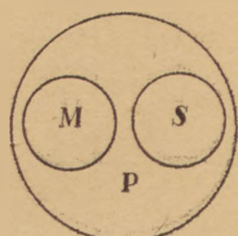
Rys. 16

przesłanki *PaM*, *SaM* nie dają konkluzji, nie istnieje wspólna część zakresów *SMP*.



Rys. 17

przesłanki *MaP*, *SeM* nie dają konkluzji, nie istnieje wspólna część zakresów *SnieMnieP*.



Rys. 18

Wspomniano wyżej, że za pomocą praw sylogizmu dowodzi się zupełności wyliczenia 24 trybów sylogizmu. Trzeba w tym celu utworzyć wszystkie możliwe kombinacje zdań *a*, *e*, *i*, *o* w charakterze przesłanek i konkluzyj sylogizmu i eliminować kombinacje niezgodne z prawami wyżej wymienionymi.

Dla każdej figury jest takich kombinacji 64, razem przeto jest ich 256. Weźmy dla przykładu kombinacje, w których przesłanka większa jest *a*:

aaa	*aea*	*aia*	*aoa*
aae	*aee*	*aie*	*aoe*
aai	*aei*	*aii*	*aoi*
aao	*aeo*	*aio*	*aoo*

W figurze pierwszej niemożliwe są spomiędzy powyższych wszystkie sylogizmy, z wyjątkiem *aaa*, *aii*, *aai*, a więc tych tylko, które znamy jako *Barbara*, *Barbari*, *Darii*; *aae*, *aao* niezgodne są z prawem VI, *aea*, *aei* z prawem IV, *aee*, *aeo* z prawem V itp. W rezultacie takiej eliminacji pozostaje tylko 24 tryby, po 6 w każdej figurze, jako tryby poprawne.

Te rezultaty logiki klasycznej ważne są jednak tylko z ograniczeniem do sylogizmów zbudowanych ze zdań *a*, *e*, *i*, *o*, z wyłączeniem zdań o zaprzeczonym podmiocie *a'*, *e'*, *i'*, *o'*. Jeżeli rozszerzymy zakres sylogizmów dopuszczając, aby występowały w nich zdania *a'*, *e'*, *i'*, *o'*, to otrzymujemy sylogizmy prawidłowe z czterema terminami, z których dwa są wzajemnie negacjami (np. *S* i *NS*), i w tak rozszerzonym zakresie tracą moc niektóre z praw sylogiz- klasycznego; okazują to przykłady:

a) prawo II (termin średni winien być rozłożony) nie stosuje się do sylogizmu:

P a M	Konkluzję orzeka się o przedmiotach zakresu *nie-Snie-Mnie-P*. Sylogizm ten redukuje się do trybu *Felapton* o terminach *nie-S*, *nie-M*, *P* przez kontrapozycję obu przesłanek i obwersję przesłanki większej. (Rys. 19).
S a M	
S o' P	

b) prawo III (dwie przesłanki przeczące nie dają wniosku) nie stosuje się do sylogizmu:

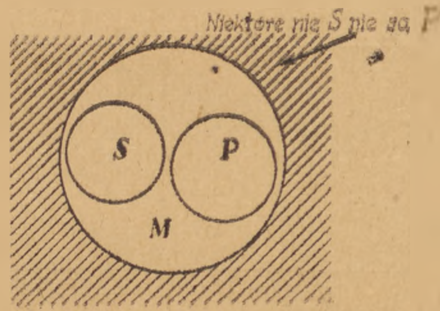
M e P	Konkluzję orzeka się o przedmiotach zakresu *nie-SMnie-P*. Sylogizm ten redukuje się do trybu *Felapton* o terminach *nie-S,M,P* przez odwrócenie proste i obwersję przesłanki mniejszej (rys. 20).
S e M	
S o' P	

c) prawo IV (konkluzja idzie za przesłanką słabszą) nie stosuje się do sylogizmu:

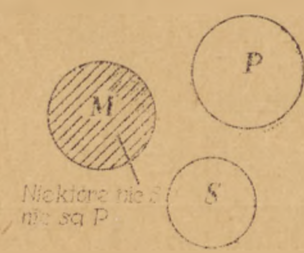
M a P	Konkluzję orzeka się o przedmiotach zakresu *nie-SMP*. Sylogizm ten redukuje się do trybu *Darapti* o terminach *nie-S,M,P* przez odwrócenie proste i obwersję przesłanki mniejszej (rys. 21).
S e M	
S i' P	

d) prawo VI (konkluzja jest przecząca tylko, jeżeli jedna z przesłanek jest przecząca) nie stosuje się do sylogizmu podanego jako przykład pod a) oraz do następującego:

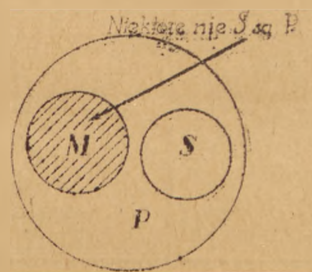
P a M	Konkluzję orzeka się o przedmiotach zakresu *nie-Snie-Mnie-P.*
M a S	Sylogizm ten redukuje się do *Calemes* o terminach *nie-S,*
S e' P	*M, P* przez obwersję mniejszej przesłanki (rys. 22).



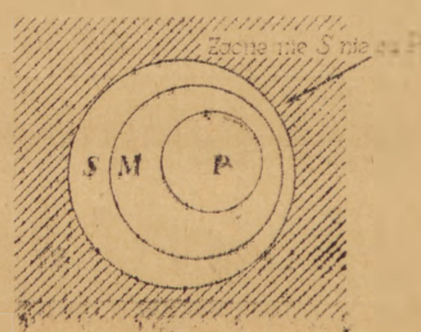
Rys. 19



Rys. 20



Rys. 21



Rys. 22

Wszystkie sylogizmy poprawne, nie tylko te, którymi zajmowała się logika klasyczna, lecz także zawierające zdania o zaprzeczonym podmiocie, wynikają inferencyjnie z tez teorii zdań wraz z założeniem, iż nie ma terminów pustych. *Dictum de omni* jest interpretacją tezy 221,7 *CCpqCCqrCpr* (lub *224,14* , którą przekształcamy na tezę teorii funkcji propozycjonalnych podstawiając *p/fx, q/gx, r/hx* i wiążąc zmienną *x* kwantyfikatorem ogólnym *(x)CCfxgxCCgxhxCfxhx.* Podstawmy z kolei *fx/Sx, gx/Mx, hx/Px* oraz zastąpmy według definicji „*CSxMx*" przez „**C***SMx*" itd., a zarazem wprowadźmy kwantyfikator ogólny do wnętrza implikacji według tezy 313,6:

433,29 $CC(x)\mathbf{C}SMxCC(x)\mathbf{C}MPx(x)\mathbf{C}SPx$

Z wyrażenia 433,29 powstaje tryb *Barbara* przez komutację obu przesłanek. Z trybu *Barbara* powstaje tryb *Celarent* przez podstawienie *Px/NPx*. Z trybu *Celarent* otrzymujemy *Darii* przez komutację przesłanek i transpozycję przesłanki ~~mniejszej~~ i konkluzji, również z *Celarent* powstaje *Ferio* przez transpozycję przesłanki mniejszej i konkluzji.

Z tych czterech głównych trybów pierwszej figury wyprowadza się równoważnie — jak to uczyniliśmy poprzednio — tryby główne pozostałych figur, z wyjątkiem *Darapti*, *Felapton*, *Bamalip*, *Fesapo*, w których z dwóch przesłanek ogólnych wynika konkluzja szczegółowa (tryby te są scharakteryzowane przez nazwy zawierające literę „*p*", która wskazuje, że przy ich redukcji do trybów pierwszej figury przechodzi się przez subalternację od zdania ogólnego do szczegółowego. Owe cztery tryby, tak samo jak tryby podrzędne, są poprawne tylko przy założeniu, że nie ma terminów pustych, resp. przy mocnym rozumieniu zdań ogólnych; przy rozumieniu słabym tych zdań stają się one błędne, gdyż — jeżeli *S* jest terminem zerowym — zdanie ogólne słabe o podmiocie *S* jest prawdziwe, gdy tymczasem zdanie szczegółowe o tym samym podmiocie jest, fałszywe. Np. z dwóch przesłanek: Każde koło kwadratowe jest kwadratem każde koło kwadratowe jest kołem, które są prawdziwe jako implikacje o fałszywym poprzedniku, wynika, według *Darapti*, konkluzja fałszywa: Niektóre koła są kwadratami. Aby wyprowadzić owe cztery tryby, a także pięć trybów podrzędnych, trzeba powołać się na twierdzenia 431,11 *Cai* oraz 431,12 *Ceo*; za ich pomocą uzyskujemy z *Barbara* i *Celarent* tryby podrzędne I figury, a z tych wreszcie — jak to już uczyniliśmy poprzednio — pozostałe.

Część 5

Teoria stosunków

Rozdział 1. Ogólna teoria stosunków

1. Funkcje propozycjonalne dwóch lub więcej argumentów

Zdania: Kain zabił Abla, 4 jest podzielne przez 2, punkt A leży między B i C, Jan zamienił z Józefem kapotę na cielę — podają przykłady stosunków, czyli relacyj. Zdania takie składają się z funktora zdaniotwórczego dwóch lub więcej argumentów i odpowiedniej liczby tychże; argumenty oznaczają człony stosunku; stosownie do ich liczby rozróżniamy stosunki dwuczłonowe, trójczłonowe itp. Człony stosunku są oznaczone bądź przez nazwy, bądź przez wyrażenia innych kategorii semantycznych, np. orzeczniki. Zdania oznaczające stosunki mają częstokroć postać orzecznikową, np.: Kain jest zabójcą Abla, w której orzecznik składa się z funktora nazwotwórczego zmiennej nazwowej wraz z tą nazwą. Funktor taki nazywamy funktorem relatywnym, a orzecznik złożony z funktora relatywnego i jego argumentu — orzecznikiem względnym lub relatywem; relatywami są wyrażenia: większy od 2, przyjaciel Józefa itp.

Wprowadzając na miejsce argumentów zmienne, otrzymujemy funkcje propozycjonalne: x zabił y itp. — ogólnie fxy, $gxyz$ itp. Gdy zajmujemy się w logice relacjami, to zazwyczaj takie funkcje propozycjonalne mamy na myśli, nie zaś zdania określone, które są ich interpretacjami.

Analogicznie do rozróżnienia, jakie uczyniliśmy dla orzeczników (411), między wyrażeniem Px jako zmienną, nieokreśloną wartością funkcji orzecznikowej oraz funkcją orzecznikową $P\hat{x}$ w oderwaniu od jej wartości, także i teraz trzeba odróżnić wyrażenie fxy jako zmienną od funkcji propozycjonalnej dwóch (i analogicznie więcej) argumentów w oderwaniu od jej poszczególnych wartości, którą oznaczamy symbolem „$f\hat{x}\hat{y}$" z daszkami nad „x" i „y", a nazywamy „stosunkiem". W ten sposób wyrażenia $C\hat{p}\hat{q}$, $A\hat{p}\hat{q}$ rozumiemy jako stosunki międzyzdaniowe, a orzeczniki złożone $\mathbf{C}\hat{S}\hat{P}$, $\mathbf{K}\hat{S}\hat{P}$ — jako stosunki międzyorzecznikowe. W teorii zdań wyrażenie Cpq, które czytamy „jeżeli p, to q", jest wyrażeniem zmiennym, reprezentującym poszczególne, jakiekolwiek zdanie złożone tej postaci; natomiast twierdząc, że wyrażenie $C\hat{p}\hat{q}$ oznacza stosunek

między zdaniami p i q, rozumiemy $C\hat{p}\hat{q}$ jako orzecznik, skrót zamiast implikacji między p oraz q, jak w zdaniu: „jeżeli p, to q" jest implikacją między p oraz q. Wyrażenie $C\hat{p}\hat{q}$ należy do kategorii semantycznej rzędu bezpośrednio wyższego od rzędu kategorii semantycznej wyrażenia Cpq.

Jako funkcje propozycjonalne dwóch lub więcej argumentów piszemy stosunki, analogicznie do funkcji propozycjonalnych jednego argumentu fx, kładąc funktor przed argumentami: Rxy, $Sxyz$ — jako funktorów będziemy używali wielkich liter „R", „S", „T"... W mowie potocznej oraz w symbolice matematycznej najczęściej wypowiada się i pisze relacje w ten sposób, iż funktor znajduje się między dwoma argumentami, jak w przytoczonych na początku zdaniach, lub „$4-1=3$", „$3<4$", „$AB \perp CD$"; zdarza się jednak i odmienny porządek, jak np., „jeżeli p, (to) q", „większy Pan Bóg niż pan Rymsza".

Rola obu argumentów relacji dwuczłonowej nie jest jednakowa i podobnie przy relacjach wieloczłonowych. Język potoczny odróżnia oba argumenty w ten sposób, iż jeden z nich kładzie w mianowniku, ten człon nazywamy p o p r z e d n i k i e m relacji, drugi zaś, czyli n a s t ę p n i k, w innym przypadku: dopełniaczu, celowniku lub bierniku. W przedstawieniu symbolicznym odróżnia się oba argumenty od siebie według ich kolejności: argument stojący na pierwszym miejscu jest poprzednikiem stosunku, argument stojący na drugim miejscu — jego następnikiem, tak iż wyrażenia fxy i fyx nie są równoznaczne.

Gdy pojmujemy funkcje propozycjonalne dwóch argumentów jako stosunki, to interpretujemy je t r e ś c i o w o, podobnie jak interpretowaliśmy treściowo funkcje propozycjonalne jednej zmiennej jako własności. Istnieje również z a k r e s o w a interpretacja stosunków, mianowicie zakres funkcji propozycjonalnej dwóch zmiennych jest zbiorem wszystkich i tych tylko par przedmiotów, dla których funkcja staje się zdaniem prawdziwym. Pary należące do zakresu relacji są parami uporządkowanymi, tzn. para xy jest różna od pary yx; tak np. do zakresu stosunku: x jest nauczycielem y, należy para Platon-Arystoteles, nie należy natomiast para Arystoteles-Platon.

Zakresy stosunków dwuczłonowych dają się przedstawić graficznie przez m a t r y c e d w u w y m i a r o w e. Przedstawieniem takim posługiwaliśmy się już, gdy omawialiśmy funkcje prawdziwościowe jako związki między zdaniami (241). Postępowanie, jakie tam zostało zastosowane, trzeba obecnie uogólnić do zakresów jakichkolwiek stosunków. Tworzymy w tym celu siatkę prostokątną. Każdy jej węzeł jest określony przez podanie wiersza i pionu, na których przecięciu leży. Przyporządkowujemy człony stosunku, jaki chcemy przedstawić za pomocą matrycy, wierszom i pionom siatki, tak iż węzeł siatki leżący na przecięciu wiersza x i pionu y odpowiada parze xy. Węzły odpowiadające parom należącym do zakresu stosunku wypełniamy kropką lub innym znakiem (w matrycach funkcji prawdziwościowych oznaczaliśmy je „v"), węzły odpowiadające parom nie należącym do zakresu stosunku pozostawiamy nie wy-

pełnione (w matrycach funkcji prawdziwościowych oznaczaliśmy je „f"). Weźmy dla przykładu stosunki: a) x urodził się wcześniej od y, b) x dożył dłuższego wieku od y, c) x żył jednocześnie z y, między elementami 1. Descartes (1596—1650), 2. Locke (1632—1704), 3. Leibniz (1646—1716), 4. Hume (1711—1776).



Rys. 23

Zbiór poprzedników stosunku nazywamy **przedpolem** *(dominium)* tego stosunku, zbiór następników — jego **przeciwpolem** *(codominium)*. Sumę przedpola i przeciwpola nazywą się **polem** *(campus)* stosunku. Tak np. dla stosunku: x jest mężem y — przedpole obejmuje mężczyzn żonatych, przeciwpole — kobiety zamężne, pole zaś — wszystkich małżonków. W matrycy stosunku pewien element należy do przedpola resp. przeciwpola wtedy i tylko wtedy, jeżeli w odpowiadającym mu wierszu resp. pionie znajduje się wypełniony węzeł.

Wszystkie wartości zmiennej występującej jako argument funkcji propozycjonalnej są wyrażeniami tej samej kategorii semantycznej (122), wszystkie przeto elementy przedpola, a tak samo wszystkie elementy przeciwpola — wzięte z osobna — są przedmiotami tego samego typu (122). Nie dotyczy to jednak elementów przedpola i przeciwpola łącznie. Np. w zdaniu orzecznikowym: a jest S, oznaczającym stosunek przynależności między indywiduum a i zbiorem S, „a" jest nazwą, „S" jest orzecznikiem, należą więc do różnych kategorii semantycznych. Mamy tu stosunek tym różniący się od stosunków, o których była mowa dotychczas, iż jego przedpole jest zbiorem indywiduów, natomiast jego przeciwpole jest zbiorem nie indywiduów, lecz przedmiotów innego typu (122). Stosunki, których przedpole i przeciwpole są zbiorami przedmiotów tego samego typu, nazywają się **homogenicznymi**. Stosunkiem **niehomogenicznym** nazywamy stosunek, którego pole i przeciwpole należą do różnych typów. Dla stosunków niehomogenicznych nie potrafimy złączyć przedpola i przeciwpola w jedno pole, ponieważ suma dwóch zbiorów jest zdefiniowana tylko dla zbiorów indywiduów lub w ogóle zbiorów przedmiotów należących do jednego i tego samego typu. Stosunki niehomogeniczne nie posiadają przeto pola. W dalszym ciągu, mówiąc o stosunkach bez bliższego określenia, będziemy mieć na myśli tylko stosunki homogeniczne.

Jeżeli pole stosunku jest zbiorem indywiduów, to sam stosunek, jako zbiór par uporządkowanych tychże indywiduów, jest przedmiotem innego typu. Typ stosunku określa się przez typ jego elementów. Posługujemy się w tym celu rozróżnieniem typów i rzędów kategorii semantycznych (324); analogicznie jak poprzednio określamy kategorię semantyczną funkcji propozycjonalnej przez kategorię semantyczną jej argumentów. Jeżeli argumenty *x*, *y* funkcji *Rxy* należą do kategorii semantycznej typu i rzędu zerowego, to funkcja należy do kategorii semantycznej typu *t*(*O*,*O*) rzędu pierwszego. Natomiast kategoria semantyczna funkcji *x* jest *S* — jako funkcji dwóch argumentów *x* i *S* — jest typu *t*(*O*, *t*(*O*)) i tym samym rzędu drugiego.

2. Funkcje prawdziwościowe stosunków

Analogicznie do orzeczników złożonych tworzy się relacje złożone, zdefiniowane przez funkcje prawdziwościowe teorii zdań.

1. Negacja relacji:

   512—I „𝔑*Rxy*" = „*NRxy*"

   Np. „*x* jest nieszczery względem *y*", to tyle, co „nieprawda, że *x* jest szczery względem *y*". *Definiendum* 𝔑*Rxy* jest relacją między członami *x*, *y*, *definiens* zaś — negacją relacji *R* między tymiż członami.

2. Suma relacyj:

   512—II „𝔄*RSxy*" = „*ARxySxy*"

   Np. „*x* jest synem lub córką *y*", czyli „*x* jest dzieckiem *y*", to tyle, co „*x* jest synem *y* lub *x* jest córką *y*". Symbol „𝔄*RS*" jest złożony z funktora „𝔄" oraz dwóch argumentów „*R*", „*S*" będących funktorami zdaniotwórczymi argumentów *x*, *y* i wzięty jako całość jest funktorem od argumentów *x*, *y*.

3. Iloczyn relacyj:

   512—III „𝔎*RSxy*" = „*KRxySxy*"

   Np. „*x* jest kolegą i przyjacielem *y*", to tyle, co „*x* jest kolegą *y* i *x* jest przyjacielem *y*".

4. Dysjunkcja relacyj:

   512—IV „𝔇*RSxy*" = „*DRxySxy*"

   Np. „*x* jest z boku od *y*", to tyle, co „*x* jest na lewo od *y* albo *x* jest na prawo od *y*".

5. Subsumcja relacyj:

   512—V „ℭ*RSxy*" = „*CRxySxy*"

   Np. „*x* które jest w stosunku *R* do *y*, jest w stosunku *S* do *y*", to tyle, co „jeżeli *x* jest w stosunku *R* do *y*, to jest też w stosunku *S* do *y*".

6. Równoważność relacyj:

512—VI „$\mathfrak{E}RSxy$“ = „$ERxySxy$“

Np. „x, które jest w stosunku R do y, i tylko takie jest w stosunku S do y“, to tyle, co „zawsze i tylko, jeżeli x jest w stosunku R do y, jest też w stosunku S do y“.

7. Relacja uniwersalna:

512—VII „$\mathfrak{U}xy$“ = „$ARxy\mathfrak{N}Rxy$“

„x jest w stosunku $\mathfrak{U}$ do y“, to tyle, co „x jest w pewnym stosunku R do y lub też w stosunku $\mathfrak{N}R$ do y“.

8. Relacja zerowa:

512—VIII „$\mathfrak{Z}xy$“ = „$KRxy\mathfrak{N}Rxy$“

„$\mathfrak{Z}xy$“ to tyle, co „x jest w pewnym stosunku R do y i zarazem w stosunku $\mathfrak{N}R$ do y“.

Według prawa wyłączonego środka (313,2) jest: — piszemy (x, y) zamiast (x) (y) —

512,1 $(x, y)\ \mathfrak{U}xy$

według zaś prawa sprzeczności (314,2) — (Ex,Ey) zamiast (Ex) (Ey) —

512,2 $N(Ex,Ey)\mathfrak{Z}xy$

$\mathfrak{U}xy$ jest relacją, której zakres obejmuje wszystkie pary xy, czyli która zachodzi między każdym x i każdym y w zakresie zmienności; $\mathfrak{Z}xy$ jest relacją, która nie zachodzi między żadnym x i żadnym y, jej zakres przeto nie zawiera żadnej pary.

Matryce dla relacji złożonych tworzy się z matryc ich argumentów w sposób podobny, jak zakresy dla analogicznych funkcji orzecznikowych. A zatem matrycę sumy dwóch stosunków tworzy się wypełniając w jej siatce te węzły, które są wypełnione w matrycy przynajmniej jednego z argumentów. W matrycy iloczynu wypełnia się węzły wypełnione w matrycach obu argumentów; w matrycy negacji wypełnia się jedynie węzły puste relacji negowanej. W matrycy $\mathfrak{U}xy$ są wypełnione wszystkie węzły, w matrycy $\mathfrak{Z}xy$ wszystkie węzły są puste.

Tezy teorii relacyj dotyczące stosunków złożonych otrzymuje się z tez teorii zdań (podobnie jak to było dla orzeczników) zastępując funkcje prawdziwościowe przez stosunki złożone według definicyj 512—I — 512—VIII. Tak np. teza 221,1 daje prawo identyczności dla relacyj: $\mathfrak{E}RRxy$. Wolno według dyrektywy dołączania kwantyfikatora (312) dołączyć kwantyfikator ogólny dla x i dla y; tak iż prawo identyczności brzmi:

512,3 $(x, y)\ \mathfrak{E}RRxy$

co można wypowiedzieć słowami, że stosunek $\mathfrak{C}RR$ jest stosunkiem uniwersalnym. Prawo sylogizmu (por. 221,7) ma postać

512,4 $(x, y)\, C\mathfrak{C}RSxyC\mathfrak{C}STxy\mathfrak{C}RTxy$

jeżeli x pozostaje w stosunku $\mathfrak{C}RS$ do y, to jeżeli nadto pozostaje w stosunku $\mathfrak{C}ST$ do y, pozostaje także w stosunku $\mathfrak{C}RT$ do y.

Podobnie otrzymuje się prawa tautologii, komutacji, symplifikacji, sprzeczności i wyłączonego środka, prawa De Morgana i in.

Tezy 221,2 i 222,6 pozwalają udowodnić własności stosunków $\mathfrak{U}xy$, $\mathfrak{Z}xy$ analogicznie do własności orzeczników **U** i **Z** (142,5 421,6)

221,2 CqCpq
222,6 CNpCpq

512,5 $(x, y, R)\, CRxy\mathfrak{U}xy$
512,6 $(x, y, R)\, C\mathfrak{Z}xyRxy$

Teza 221,1 teorii zdań (prawo identyczności) podaje własność stosunku implikacji polegającą na tym, iż każde zdanie pozostaje w tym stosunku do siebie samego. Stosunki posiadające tę własność, iż każdy przedmiot należący do pola stosunku pozostaje w tym stosunku do siebie samego, nazywamy zwrotnymi (ang. *reflexive*). Wprowadźmy skrót „$\overline{Zwr}R\hat{y}\hat{x}$" zamiast „$R\hat{x}\hat{y}$ jest stosunkiem zwrotnym"; kreska pozioma nad literami „Zwr" wskazuje, że tworzą one łącznie jeden znak. Definicja stosunku zwrotnego brzmi:

512—IX „$\overline{Zwr}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x)\, C\, (Ey)\, RxyRxx$",

czyli „R jest stosunkiem zwrotnym", to tyle, co „dla wszelkich x, jeżeli istnieje takie y, iż x pozostaje w stosunku R do y, to x pozostaje w stosunku R do x". Nie każdy jednak stosunek posiada własność zwrotności:

512,7 $N\, (R)\, (x)\, C\, (Ey)\, RxyRxx$

nie dla każdego R jest, że dla każdego x, jeżeli $(Ey)\, Rxy$ to Rxx.

Stosunki równości arytmetycznej, przystawania trójkątów, podobieństwa są przykładami stosunków zwrotnych. Stosunek, który nie jest zwrotny, nazywa się niezwrotnym. Jeżeli stosunek jest niezwrotny, to jednak zwrotność może zachodzić dla niektórych, lecz nie dla wszystkich przedmiotów jego pola, np. stosunek „x chwali y" jest stosunkiem niezwrotnym, niektórzy jednak ludzie chwalą siebie samych.

512—X „$\overline{NZwr}R\hat{x}\hat{y}$" = „$N\, (x)\, C\, (Ey)\, RxyRxx$

Jeżeli natomiast dla żadnego elementu pola stosunku zwrotność nie zachodzi, stosunek nazywa się przeciwzwrotnym (*irreflexive*). Definicja stosunku przeciwzwrotnego:

512—XI „$\overline{PZwr}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x)\, C\, (Ey)\, Rxy\mathfrak{N}Rxx$"

Przykładami stosunków przeciwzwrotnych są nierówność liczbowa, poprzedzanie czasowe, prostopadłość odcinków itp.

3. Orzeczniki względne

Związki między stosunkami i orzecznikami otrzymuje się wprowadzając orzeczniki względne, czyli relatywy:

513—I „$R^{>y}x$“ = „Rxy“,

czyli „x jest R-owym poprzednikiem *ygreka*“, to tyle, co „x pozostaje w stosunku R do y“. Np. „Kratylos jest nauczycielem Platona“ to tyle, co „Kratylos nauczał Platona“. Orzecznik względny „$R^{>y}$“ (czytamy: „R-owy poprzednik *ygreka*“) posiada zakres obejmujący przedmioty, które są R-owymi poprzednikami y-greków, czyli które pozostają w stosunku R do y.

Podobnie definiuje się:

513—II „$R^{<x}y$“ = „Rxy“,

czyli „y jest R-owym następnikiem *iksa*“, to tyle, co „x pozostaje w stosunku R do y“. Np. „Platon jest uczniem Kratyla“ to tyle, co „Kratylos nauczał Platona“. Do zakresu relatywu „$R^{<x}$“, który czytamy „R-owy następnik *iksa*“, należą przedmioty y, do których x pozostaje w stosunku R.

Definicje 513—I i 513—II przekształcają stosunki dwuczłonowe, czyli funkcje propozycjonalne dwóch argumentów, na funkcje orzecznikowe (por. tw. 411,1).

Niech S będzie orzecznikiem, np. „wybitny mąż“, a stosunek xRy niech brzmi „x jest żoną y“. Wprowadzamy symbol „$R^{\gg S}$“ jako orzecznik, którego desygnatami są przedmioty x pozostające w stosunku R do któregokolwiek z elementów zakresu orzecznika S. Przy wskazanych wyżej przykładowo znaczeniach dla „R“ i „S“ funkcja „x jest $R^{\gg S}$“ znaczy tyle, co „x jest żoną wybitnego męża“. Definicja wyrażenia „x jest $R^{\gg S}$“ ma postać:

513—III „$R^{\gg S}x$“ = „$(Ey)\,KSyRxy$“,

czyli „x jest R-owym poprzednikiem pewnego S-a“ to tyle, co „dla pewnego y:y jest S i x pozostaje w stosunku R do y“.

Terminy „$R^{>y}$“ i „$R^{\gg S}$“ pozwalają zanalizować formę rozumowania zwaną sylogizmem niewprost (*sylogismus obliquus, consequentia a rectis ad obliqua*). Jest to forma rozumowania, w której jeden przynajmniej z terminów występuje nie wprost jako termin, lecz jako przydawka lub uzupełnienie orzecznika względnego. Takim rozumowaniem jest np.:

Wielokrotności liczby parzystej są liczbami parzystymi
6 jest liczbą parzystą
―――――――――――――――
Wielokrotności 6 są liczbami parzystymi.

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

221, 8 CCpqr CCpq Cqr
q/KSa Rxa r/(Σy)KSy Rxy, p/Rxa x C 312, z x/y, f y/KSy Rxy
CC KSa Rxa (Σy) KSy Rxy CC Rxa KSa Rxa C Rxa (Σy) KSy Rxy

312, 2
221, 7 p/Sa, q/CRxa KSa Rxa, r/CRxa (Σy) KSy Rxy
CCSa CRxa KSa Rxa CCCRxa KSa Rxa CRxa (Σy) KSy Rxy CSa C Rxa (Σy) KSy Rxy

Cp Cq Kpq
a
b

/b) CSa C Rxa (Σy) KSy Rxy
R^{>a}x R^{>>S}x
CSa (x) C R^{a}x R^{>>S}x

Cfa (Σy) fy
fa/KSa Rxa
~~CKSa Rxa (Σy) fy Rxy~~ CKSa Rxa (Σy) Sy Rxy CCKpqr CpCqr
~~CKSa (x) Rxa~~
CSa C Rxa (Σy) Sy Rxy
CSa (x) C R^{a}x R^{>>S}x

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

Rozumowanie powyższe opiera się na twierdzeniu:

$$513{,}1 \qquad CSa\,(x)\,\mathbf{C}R^{a}R^{»S}x,$$

czyli: „jeżeli *a* jest *S*, to każdy *R*-owy poprzednik *a* jest *R*-owym poprzednikiem pewnego *S*-a". Dowód tego twierdzenia łatwo przeprowadzić, powołując się na tezy 224,22 (*CpCqKpq*) i 312,2 (*Cfa*(*Ex*)*fx*), na zasadę sylogizmu 221,7 i 221,8 oraz na definicje 513—I i 513—III. Dowód przebiega, jak następuje:

221,8 *q*/*KSaRxa*, *r*/(*Ey*)*KSyRxy*, *p*/*Rxa*; *C* 312,2 *x*/*y*, *fy*/*KSyRxy*—*a*)

a) *CCRxaKSaRxaCRxa*(*Ey*)*KSyRxy*

221,7 *p*/*Sa*, *q*/ *CRxaKSaRxa*, *r*/*CRxa*(*Ey*)*KSyRxy*; *C* 224,22 *p*/*Sa*, *q*/*Rxa* — *Ca*—*b*

b) *CSaCRxa*(*Ey*)*KSyRxy*,

b) 513-I, 513-III, 412-V, 312 Dyr.2; 513,1

Według tezy 513,1 otrzymujemy z przesłanki „6 jest liczbą parzystą" konkluzję „wielokrotności 6 są wielokrotnościami liczby parzystej", a stąd łącznie z przesłanką „wielokrotności liczby parzystej są liczbami parzystymi" wynika konkluzja.

Inną postać sylogizmu niewprost przedstawia przykład Jungiusa: „*Omnsi irculus est figura, ergo quicunque circulum describit, figuram describit*". Zasadą tego sylogizmu jest:

$$513{,}2 \qquad (x)C\mathbf{C}SPx\mathbf{C}R^{»S}R^{»P}x,$$

słowami: jeżeli każde *S* jest *P*, to każdy *R*-owy poprzednik pewnego *S*-a jest *R*-owym poprzednikiem pewnego *P*-a.

$$513{,}3 \qquad (x)ER^{»\mathbf{A}SP}x\mathbf{A}R^{»S}R^{»P}x,$$

czyli: Dla każdego *x*: *x* jest *R*-owym poprzednikiem pewnego *S*-a lub pewnego *P*-a zawsze i tylko, jeżeli *x* jest *R*-owym poprzednikiem pewnego *S*-a lub *R*-owym poprzednikiem pewnego *P*-a". Np. *x* jest ojcem kupca lub żeglarza zawsze i tylko, jeżeli *x* jest ojcem kupca lub ojcem żeglarza.

$$513{,}4_{1} \qquad (x)CR^{»\mathbf{K}SP}x\mathbf{K}R^{»S}R^{»P}x,$$

czyli: Dla każdego *x*: jeżeli *x* jest *R*-owym poprzednikiem *S*-a i *P*-a, to *x* jest *R*-owym poprzednikiem *S*-a i *x* jest *R*-owym poprzednikiem *P*-a — lecz nie odwrotnie. Np. jeżeli *x* jest przyjacielem uczonego prawnika, to *x* jest przyjacielem uczonego i *x* jest przyjacielem prawnika, lecz nie odwrotnie, gdyż może być, że uczony i prawnik to dwie różne osoby. Twierdzenie 513,3 jest równoważnością, ponieważ opiera się na tezach 314,3 i 314,4, które pozwalają kwantyfikator szczegółowy włączyć pod alternatywę lub wyłączyć przed

314,5 C(Σx)Kfxgx K(Σx)fx(Σx)gx

nią. Natomiast twierdzenie 513,4 jest ważne tylko jako implikacja, opiera się bowiem na tezie 314,5, która pozwala jedynie na włączenie kwantyfikatora szczegółowego pod koniunkcję, nie pozwala natomiast na jego wyłączenie.

Tezy 513,3 i 513,4 przekształcają R-owy poprzednik sumy lub iloczynu na sumę resp. iloczyn R-owych poprzedników.

513,5 $(x)\mathbf{E}\mathbf{A}RT^{»S}x\mathbf{A}R^{»S}T^{»S}x$,

czyli: Dla każdego x: x jest R-owym lub T-owym poprzednikiem pewnego S-a zawsze i tylko, jeżeli x jest R-owym poprzednikiem pewnego S-a lub T-owym poprzednikiem pewnego S-a. Np. ktoś jest dłużnikiem lub wierzycielem pewnego kupca zawsze i tylko, jeżeli jest dłużnikiem pewnego kupca lub jeżeli jest wierzycielem pewnego kupca.

513,6 $(x)\mathbf{C}\mathbf{K}RT^{»S}x\mathbf{K}R^{»S}T^{»S}x$,

czyli: Jeżeli x jest R-owym i T-owym poprzednikiem pewnego S-a, to x jest R-owym poprzednikiem pewnego S-a i T-owym poprzednikiem pewnego S-a. Np. jeżeli x jest większe od pewnej liczby i przez nią podzielne, to x jest większe od pewnej liczby i podzielne przez pewną liczbę. Twierdzenie niniejsze, podobnie jak 513,4, nie jest odwracalne.

513,7 $(x, y)\ \mathbf{C}\mathbf{C}RTxy\mathbf{C}R^{»S}T^{»S}x$,

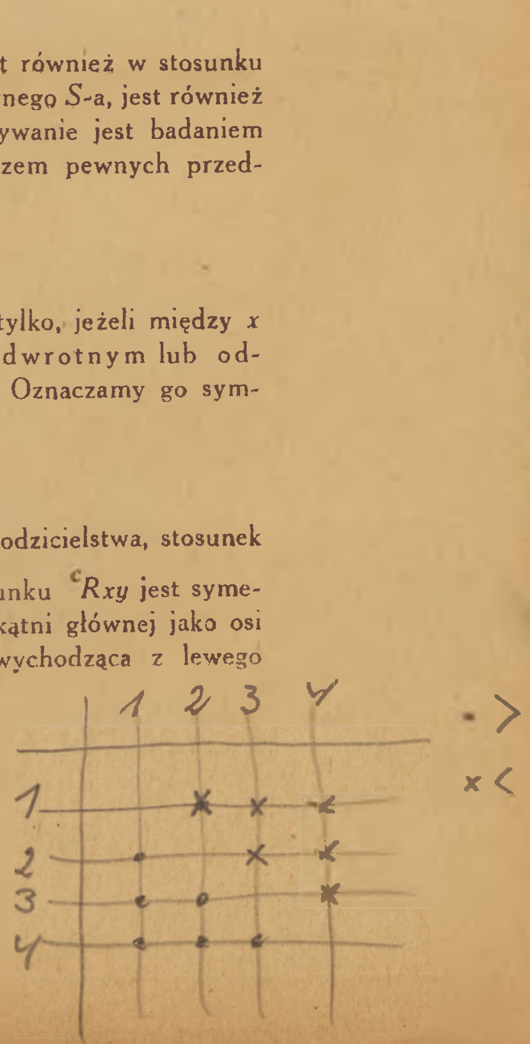
czyli: Jeżeli każde x, które jest w stosunku R do y, jest również w stosunku T do y, to każde x, które jest R-owym poprzednikiem pewnego S-a, jest również T-owym poprzednikiem pewnego S-a. Np. jeżeli opisywanie jest badaniem naukowym, to opisujący pewne przedmioty jest badaczem pewnych przedmiotów.

4. Odwrócenie stosunku

Stosunek, który istnieje między y oraz x, zawsze i tylko, jeżeli między x oraz y istnieje stosunek R, nazywa się **stosunkiem odwrotnym** lub **odwrotnością**, inaczej jeszcze **konwersją**, stosunku R. Oznaczamy go symbolem „^{c}R":

514-1 „^{c}Rxy" = „Ryx"

Np. stosunek dzieciństwa jest odwrotnością stosunku rodzicielstwa, stosunek równości jest swą własną odwrotnością. Matryca stosunku ^{c}Rxy jest symetrycznym odbiciem matrycy stosunku Rxy według przekątni głównej jako osi symetrii (przekątną główną matrycy jest przekątna wychodząca z lewego górnego jej wierzchołka).



Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	1
21	22	23	24	25	26	2
31	32	33	34	35	36	3
41	42	43	44	45	46	4
51	52	53	54	55	56	5
61	62	63	64	65	66	6
71	72	73	74	75	76	7
81	82	82	84	85	86	8
91	92	93	94	95	96	

Następujące tezy podają niektóre własności stosunków odwrotnych:

514,1 $E{}^{cc}RxyRxy$

Jest to tzw. prawo podwójnej konwersji: konwersja konwersji stosunku R jest równoważna z nim samym. Tak np. odwrotnością stosunku rodzicielstwa jest stosunek dziecińństwa, a odwrotnością tego stosunku — znów stosunek rodzicielstwa.

514,2 $E\mathfrak{N}{}^{c}Rxy{}^{c}\mathfrak{N}Rxy$

Negacja konwersji stosunku R jest równoważna z konwersją negacji tego stosunku. Np. konwersją stosunku rodzicielstwa jest stosunek dziecińństwa, negacja konwersji rodzicielstwa brzmi przeto, „x nie jest dzieckiem y“. Negacją zaś stosunku rodzicielstwa jest stosunek nie-rodzicielstwa, jego konwersją stosunek nie-dziecińństwa, czyli jak poprzednio, „x nie jest dzieckiem y“.

514,3 $E{}^{c}\mathfrak{A}RSxy\mathfrak{A}{}^{c}R{}^{c}Sxy$

Konwersja sumy stosunków R, S jest równoważna sumie obu stosunków skonwertowanych. Np. niech „Rxy“ znaczy „x jest o rok starszy od y“, „Sxy“ zaś „x jest o dwa lata starszy od y“; wówczas „${}^{c}\mathfrak{A}RSxy$“ znaczy „x jest młodszy o rok lub młodszy o dwa lata od y“, „$\mathfrak{A}{}^{c}R{}^{c}Sxy$“ zaś również „$x$ jest młodszy o rok lub młodszy o dwa lata od y“.

514,4 $E{}^{c}\mathfrak{K}RSxy\mathfrak{K}{}^{c}R{}^{c}Sxy$

Konwersja iloczynu stosunków R, S jest równoważna iloczynowi obu skonwertowanych stosunków. Np. niech „Rxy“ znaczy „x jest ojcem y“, „Sxy“ zaś „x jest nauczycielem y“; „${}^{c}\mathfrak{K}RSxy$“, tak samo jak „$\mathfrak{K}{}^{c}R{}^{c}Sxy$“, to tyle, co „$x$ jest dzieckiem i uczniem y“.

514,5 $E\mathfrak{C}RSxy\mathfrak{C}{}^{c}R{}^{c}Sxy$

zawsze i tylko, jeżeli istnieje subsumcja między stosunkami R, S, istnieje ona także między stosunkami odwróconymi. Np. subsumcja „jeżeli x jest ojcem y, to x jest starszy od y“, daje po skonwertowaniu obu stosunków „jeżeli x jest dzieckiem y, to x jest młodszy od y“.

Niektóre stosunki posiadają własność symetryczności. „Stosunek jest symetryczny“ znaczy tyle, co „jeżeli Rxy, to ${}^{c}Rxy$“:

514,-II „$\overline{Sym}R\hat{x}\hat{y}$“ = „$(x,y)\, CRxy{}^{c}Rxy$“

Stosunek, który nie jest symetryczny, nazywa się niesymetrycznym, definicja przeto stosunku niesymetrycznego opiewa:

514-III „$\overline{NSym}R\hat{x}\hat{y}$“ = „$N(x, y)\, CRxy{}^{c}Rxy$“

Jeżeli Rxy wyklucza ${}^{c}Rxy$, czyli implikuje $\mathfrak{N}{}^{c}Rxy$, stosunek nazywa się przeciwsymetrycznym:

514-IV „$\overline{PSym}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x, y)CRxy\mathfrak{N}{}^{c}Rxy$"

Np. symetrycznymi stosunkami są: równość liczb, prostopadłość odcinków, alternatywa i koniunkcja zdań (prawo przemienności); przeciwsymetryczne są: stosunek większości między liczbami, stosunki następstwa czasowego. Niesymetryczne: Cpq, x jest bratem y, stosunek niemniejszości między liczbami itp.

Matryca stosunku symetrycznego jest symetryczna według głównej przekątnej, tzn. jeżeli jest wypełniony węzeł xy po jednej stronie tej przekątnej, to jest wypełniony również węzeł yx po drugiej jej stronie. W matrycy stosunku przeciwsymetrycznego, jeżeli węzeł xy należy do matrycy, to węzeł yx na pewno do niej nie należy. Matryca stosunku niesymetrycznego nie dla każdej pary xy należącej do niej zawiera także parę odwrotną. Matryce stosunków a), b) (511) są matrycami stosunków przeciwsymetrycznych, matryca stosunku c) jest matrycą stosunku symetrycznego.

Suma, iloczyn, negacja stosunków symetrycznych są również stosunkami symetrycznymi; stosunek symetryczny może być jednak sumą lub iloczynem stosunków niesymetrycznych lub przeciwsymetrycznych, np. x jest bratem lub siostrą y, x jest mniejsze lub większe od y, są stosunkami symetrycznymi.

Stosunek R nazywa się spójnym (ang. *connex*), jeżeli dla dowolnych dwóch elementów jego pola jest bądź Rxy, bądź ${}^{c}Rxy$; definicja stosunku spójnego brzmi przeto:

514-V „$\overline{Sp}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x, y)C\mathfrak{N}Rxy{}^{c}Rxy$"

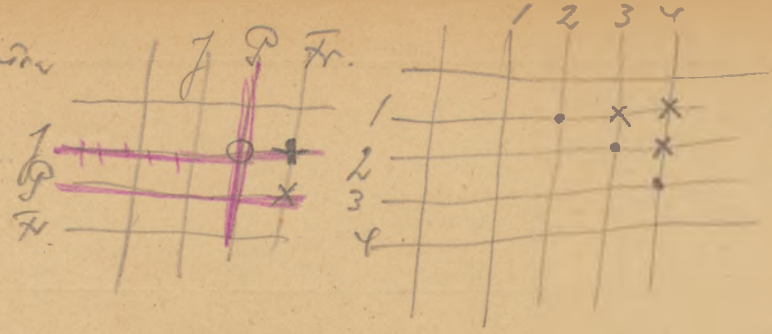
Spójny jest np. stosunek mniejszości między dwiema różnymi liczbami naturalnymi, stosunek następstwa między dwoma nierównoczesnymi momentami czasowymi itp.

5. Iloczyn względny i suma względna

Stosunki złożone mogą być tworzone jeszcze inaczej, niż to czyniliśmy dotychczas. Jeżeli x jest synem y, zaś y synem z, to x jest wnukiem z; podobnie brata żony lub męża nazywamy szwagrem, brata matki — wujem itp. Ogólnie mówiąc, jeżeli między x i y zachodzi stosunek R, między tymże y oraz z stosunek S, to między x i z zachodzi stosunek złożony ze stosunków R i S, który nazywamy iloczynem względnym stosunków R i S. Iloczyn względny „$\mathfrak{P}RSxy$" stosunków R, S definiuje się, jak następuje:

515-I „$\mathfrak{P}RSxy$" = „$(Ez)KRxzSzy$",

co czytamy „x jest w stosunku $\mathfrak{P}RS$ (R względem S) do y" to tyle, co „dla pewnego z: x jest w stosunku R do z i z jest w stosunku S do y", np. „x jest wnukiem y" to tyle, co „dla pewnego z: x jest dzieckiem z i z jest dzieckiem y",



Matrycę stosunku $\mathfrak{P}RSxy$ otrzymuje się z matryc stosunków Rxy i Sxy, wypełniając w niej węzeł xy pod tym i tylko pod tym warunkiem, iż w wierszu x matrycy stosunku R oraz w pionie y matrycy stosunku S znajduje się wypełniony węzeł na z-tym miejscu. Tak np. przypuśćmy, że Jan jest synem Piotra, a Piotr — bratem Franciszka; w matrycy stosunku: x jest synem y — mamy węzel w wierszu „Jan" i pionie „Piotr", w matrycy stosunku: x jest bratem y — w wierszu „Piotr" i pionie „Franciszek", wobec czego w matrycy stosunku: x jest bratankiem y — powstaje węzeł w wierszu „Jan" i w pionię „Franciszek".

Następujące tezy podają niektóre własności iloczynu względnego:

515,1 $N(x,y)(R,S)C\mathfrak{P}RSxy\mathfrak{P}SRxy$

Iloczyn względny nie jest przemienny. Np. brat ojca — to nie to samo, co ojciec brata itp.

515,2 $N(x,y)(R)C\mathfrak{P}RRxyRxy$

Iloczyn względny nie podlega prawu tautologii (por. np. tezy 224,1 i 224,5 dla koniunkcji); np. ojciec ojca nie jest ojcem, lecz dziadkiem; przyjaciel mego przyjaciela nie zawsze jest moim przyjacielem. Jednakowoż dla pewnych stosunków zwanych **przechodnimi** (ang. *transitiv*) prawo tautologii jest zachowane; definiujemy stosunek przechodni, jak następuje:

515-II „$PrzR\hat{x}\hat{y}$" = „$(x,y)C\mathfrak{P}RRxyRxy$"

Przykładami stosunków przechodnich są braterstwo, równość liczbowa, $C\hat{p}\hat{q}$ i in.

Stosunki, które nie są przechodnie, nazywają się **nieprzechodnie** (ang. *żransitiv*):

515-III „$\overline{NPrzR}\hat{x}\hat{y}$" = „$N(x,y)C\mathfrak{P}RRxyRxy$"

Przykładami stosunków nieprzechodnich oprócz podanych poprzednio są równość, podobieństwo, prostopadłość odcinków i in.

515,3 $(x,y)\ C\mathfrak{C}RQxyC\mathfrak{C}STxy\mathfrak{C}\mathfrak{P}RS\mathfrak{P}QTxy$

Jest to **prawo kompozycji** dla iloczynu względnego (por. tezę 224,11 dla dysjunkcji): Jeżeli $\mathfrak{C}RQxy$, to jeżeli $\mathfrak{C}STxy$, subsumcja zachodzi także między iloczynem względnym poprzedników oraz iloczynem względnym następników tamtych subsumcyj. Np. bratanek jest krewnym, podwładny jest współpracownikiem, a bratanek podwładnego jest krewnym współpracownika.

515,4 $(x,y)C\mathfrak{P}R\mathfrak{A}STxy\mathfrak{A}\mathfrak{P}RS\mathfrak{P}RTxy$

Jest to **prawo rozdzielności dla iloczynu względnego względem sumy stosunków**. Jest ono ważne także w kierunku odwrotnym:

515,5 $(x,y)\ C\mathfrak{A}\mathfrak{P}RS\mathfrak{P}RTxy\mathfrak{P}R\mathfrak{A}STxy$

Jeżeli ktoś jest np. przyjacielem ojca lub matki, to jest przyjacielem ojca lub przyjacielem matki i odwrotnie. Te same związki pozostają ważne także, gdy suma stosunków jest poprzednikiem iloczynu względnego; powiedzenie

np., że ktoś jest ojcem lub matką przyjaciela, jest równoważne powiedzeniu, że ktoś jest ojcem przyjaciela lub matką przyjaciela i odwrotnie.

Prawo rozdzielności ważne jest również dla iloczynu względnego względem iloczynu stosunków w poprzedniku lub następniku iloczynu względnego, ale tylko w jednym kierunku, tzn. implikacja odwrotna nie zachodzi:

515,6 $(x,y)\ C\mathfrak{P}R\mathfrak{K}STxy\mathfrak{K}\mathfrak{P}RS\mathfrak{P}RTxy$

515,7 $(x,y)\ C\mathfrak{P}\mathfrak{K}RSTxy\mathfrak{K}\mathfrak{P}RT\mathfrak{P}STxy$

Np. jeżeli x jest starszy od czyjegoś kolegi i przyjaciela, to x jest starszy od czyjegoś kolegi i x jest starszy od czyjegoś przyjaciela; natomiast nie zawsze, jeżeli x jest starszy od czyjegoś kolegi i jest starszy od czyjegoś przyjaciela, to x jest starszy od czyjegoś kolegi i przyjaciela, bo być może, że ów kolega i ów przyjaciel — to dwie różne osoby.

515,8 $(x,y)\ E\mathfrak{P}R\mathfrak{P}STxy\mathfrak{P}\mathfrak{P}RSTxy$

Prawo łączności dla iloczynu względnego. Np. jeżeli x jest bratem babki (matki ojca) y, to x jest wujem (bratem matki) ojca y i odwrotnie.

515,9 $(x,y)\ E^{c}\mathfrak{P}RSxy\mathfrak{P}^{c}S^{c}Rxy$

Prawo odwrócenia (konwersji) iloczynu względnego: odwróceniem iloczynu względnego dwóch stosunków jest iloczyn względny odwróceń tych stosunków w przeciwnym porządku. Np. jeżeli x jest starszym bratem ojca y, to y jest synem młodszego brata x.

515,10 $(x,y)\ E\mathfrak{P}RIxyRxy$

515,11 $(x,y)\ E\mathfrak{P}IRxyRxy$,

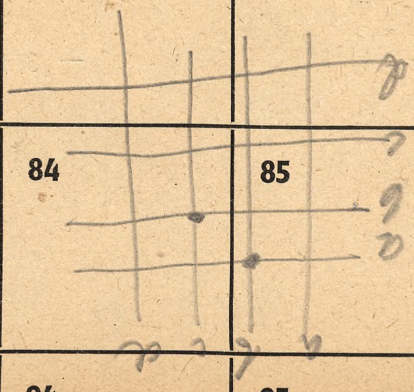
tzn. iloczyn względny stosunku R przez identyczność — lub identyczności przez R — jest równoważny stosunkowi R. Np. jeżeli 4 jest kwadratem liczby identycznej z 2, to jest kwadratem liczby 2; jeżeli liczba identyczna z 4 jest kwadratem 2 to 4 jest kwadratem 2.

Wobec tezy 515,2 można definiować dla iloczynu względnego potęgi stosunków analogicznie do potęg liczbowych, pisząc „R^2xy" zamiast „$\mathfrak{P}RRxy$", „R^3xy" zamiast „$\mathfrak{P}\mathfrak{P}RRRxy$" itd.; w tym sensie „$Rxy$" jest tym samym, co „$R^1xy$", a wreszcie ze względu na 515,10 i 515,11 można położyć: „Ixy" = = „R^0xy".

515,12 $(x,y)\ E\mathfrak{P}RS^{\text{»}P}{}_{x}R^{\text{»}S^{\text{»}P}}{}_{x}$,

czyli: x jest $\mathfrak{P}RS$-owym poprzednikiem pewnego P-a (lub: dla pewnego z: x jest w stosunku R do z i z jest w stosunku S do pewnego P) zawsze i tylko, jeżeli x jest R-owym poprzednikiem S-owego poprzednika pewnego P-a. Np. x jest uczniem z, który jest synem rolnika, zawsze i tylko, jeżeli x jest uczniem syna rolnika. Dla dowodu należy rozwinąć „$\mathfrak{P}RS^{\text{»}P}{}_{x}$" według definicyj 513-III

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	1
21	22	23	24	25	26	2
31	32	33	34	35	36	3
41	42	43	44	45	46	4
51	52	53	54	55	56	5
61	62	63	64	65	66	6
71	72	73	74	75	76	7
81	82	82	84	85	86	8
91	92	93	94	95	96	



Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

oraz 515-I, a następnie powołując się na dyrektywę przemienności dwóch kwantyfikatorów szczegółowych (314,7) oraz dyrektywę łączności dla koniunkcji (224,7, 224,8) przekształcić to rozwinięcie na wyrażenie „$R^{\text{»}S^{\text{»}P}} x$“ z dwukrotnym zastosowaniem definicji 513-III. Według tezy 515,12 można zmienić iloczyn względny w relatywie na relatyw relatywu.

Biorąc pod uwagę definicję iloczynu względnego otrzymuje się dla jego negacji równoważność następującą:

515,13 $E\mathfrak{N}\mathfrak{P}RSxy(z)A\mathfrak{N}Rxz\mathfrak{N}Szy$

Wyrażenie $(z)ARxzSzy$ będące dualnym odpowiednikiem (224,40—224,45) iloczynu względnego nosi nazwę sumy względnej. Wprowadźmy dla skrócenia na oznaczenie sumy względnej stosunków Rxy i Sxy symbol „$\mathfrak{S}RSxy$“; definicja sumy względnej ma postać:

515-IV „$\mathfrak{S}RSxy$“ = „$(z)ARxzSzy$“,

co czytamy: „x jest w stosunku $\mathfrak{S}RS$ do y“ to tyle, co „dla każdego z bądź x jest w stosunku R do z, bądź z jest w stosunku S do y“ lub inaczej „x jest w stosunku R do każdego z, które nie jest w stosunku S do y“. Np. stosunek „x jest obrońcą y“ jest sumą względną stosunków „x zwalcza y“ oraz „x jest przychylny dla y“; określamy bowiem „x jest obrońcą y“ jako „x zwalcza każdego, kto nie jest przychylny dla y“.

Definicja sumy względnej pozwala sformułować prawo negacji iloczynu względnego zawarte w tezie 515,13, jak następuje: Negacja iloczynu względnego jest sumą względną zanegowanych czynników. W tej postaci prawo powyższe jest analogiczne do prawa De Morgana dla koniunkcji. Między iloczynem względnym i sumą względną istnieje odpowiedniość dualna, jak między koniunkcją i alternatywą.

Rozdział 2. Elementy szczegółowej teorii stosunków

1. Stosunki jednoznaczne — Funkcje deskryptywne

Stosunek Rxy posiadający własność tego rodzaju, iż dla każdego y istnieje co najwyżej tylko jedno x, które pozostaje w stosunku R do y, nazywa się stosunkiem jednoznacznym (ang. *one-many*, niem. *einmehrdeutige Relation*). Stosunkami jednoznacznymi są x jest ojcem y, 4 jest kwadratem 2, 1 jest *sinusem* 90^0 itp. Jeżeli zaś dla każdego x istnieje co najwyżej tylko jedno y takie, iż Rxy, stosunek jest odwrotnie jednoznaczny (ang. *many-one rel.*, niem. *mehreindeutige Relation*). Definicja stosunku jednoznacznego brzmi przeto:

521—I „$_{Jz}Rxy$“ = „$\epsilon KRxyRzyIxz$“

prawą stronę tej definicji czytamy: „jeżeli Rxy i Rzy, to x i z są identyczne“.

Definiens 521-I daje się przekształcić według definicji 515-I, tak iż powstaje równoważność

521,1 $ECKRxyRzyIxzC\mathfrak{B}R{}^{c}RxzIxz$

Innymi słowy: stwierdzenie jednoznaczności stosunku R jest równoważne stwierdzeniu, że jeżeli między x i z zachodzi iloczyn względny stosunku R i jego odwrócenia, to x i z są identyczne.

Definicja stosunku odwrotnie jednoznacznego ma postać:

521-II „$OJzR\hat{x}\hat{y}$" = „~~$CKRxyRxzIyz$~~",

tzn. „stosunek R jest odwrotnie jednoznaczny", to tyle co: „jeżeli R zachodzi między x i y oraz x i z, to y i z są identyczne".

Jeżeli stosunek R jest jednoznaczny, to stosunek ${}^{c}R$ jest odwrotnie jednoznaczny. Stosunkami jednoznacznymi między y i x są funkcje matematyczne $y = 5 + x$, $y = x/2$, $y = x^2$, $y = \sin x$. W funkcjach matematycznych literą „x" oznacza się zmienną niezależną, literą „y" — zależną od niej funkcję; ze względu na ten stosunek zależności uważa się x za poprzednik stosunku, y za następnik; w przyjętych wyżej określeniach poprzednikiem stosunku jest termin występujący w mianowniku jako podmiot zdania orzekającego stosunek, następnikiem — termin występujący w innym przypadku jako określenie; we wzorach funkcyjnych zmienna niezależna x jest dla nas przeto następnikiem stosunku, a zmienna zależna y — jego poprzednikiem.

Chcąc przedstawić stosunek między x oraz y, dany np. przez równanie $x - y = 5$ w postaci stosunku jednoznacznego $R\hat{y}\hat{x}$, należy rozwiązać to równanie ze względu na y: $y = 5 + x$, skąd okazuje się, że y jest identyczne z $5 + x$. Stosunek przeto między y i x jest taki sam, jak stosunek między $5 + x$ oraz x (podobnie jak stosunek między x i y dany przez wyrażenie „x jest ojcem y" jest stosunkiem między x i ojcem x).

Symbol „$5+$", który czytamy „większy o 5 od", jest funktorem relatywnym podobnie, jak „ojciec", „sin", „równy"; wyrażenie zaś „$5 + x$ jest funkcją deskryptywną, tj. wyrażeniem, które staje się deskrypcją (424) dla określonych wartości argumentu x, ponieważ dla każdej wartości x istnieje jedna i tylko jedna wartość funkcji $5 + x$. Jeżeli $R\hat{x}\hat{y}$ jest stosunkiem jednoznacznym między x i y, to funkcję deskryptywną argumentu y oznaczamy symbolem „$R^{+}y$". Funkcjami deskryptywnymi są wyrażenia „ojciec *ypsylona*", „najstarszy syn *ypsylona*", „sin y" itp. Także wyrażenia „Np" (negacja zdania p), „${}^{c}R$" (konwersja stosunku R), „${}^{D}R$" (przedpole stosunku R) można przedstawić w postaci funkcji deskryptywnych, albowiem stosunkami jednoznacznymi są stosunek negacji zdania do tego zdania, konwersji stosunku do niego

samego, przedpola stosunku jakiegokolwiek do tego stosunku. Rolę funkcji deskryptywnej określają następujące definicje:

521-III „$R \rightarrow yx$“ = „$(z)ERzyIxz$“,

czyli: „x jest jedynym R-owym poprzednikiem y-greka“ to tyle, co „dla każdego z: z pozostaje w stosunku R do y zawsze i tylko, jeżeli x i z są identyczne. Np. „Jan Olbracht był najstarszym synem Kazimierza Jagiellończyka“, to znaczy „dla każdego z: z był najstarszym synem Kazimierza Jagiellończyka zawsze i tylko, jeżeli z jest identyczne z Janem Olbrachtem“. „$4 = 2^{2}$“, to znaczy „dla każdego z: $z = 2^{2}$ zawsze i tylko, jeżeli $z = 4$“.

521-IV „$PR^{\rightarrow y}$“ = „$(Ex)K(z)ERzyIxzPx$“,

czyli: „jedyny R-owy poprzednik ypsylona jest P“ to tyle, co „istnieje takie x iż dla każdego z: z jest R-owym poprzednikiem ypsylona zawsze i tylko, jeżeli x i z są identyczne i x jest P“. Np. „2^{2}“ jest liczbą parzystą“ to tyle, co „dla $x = 4$ i dla każdego z: $z = 2^{2}$ zawsze i tylko, jeżeli $z = 4$ oraz 4 jest liczbą parzystą“. „Najstarszy syn króla francuskiego nosił tytuł delfina“ to tyle, co „dla pewnego x i dla każdego z: z jest najstarszym synem króla francuskiego zawsze i tylko, jeżeli z jest identyczne z x i x nosił tytuł delfina“. Pojęcie funkcji deskryptywnej pozostaje do pojęcia orzecznika względnego (513) w podobnym stosunku, jak pojęcie deskrypcji do pojęcia orzecznika (424).

W badaniach przyrodniczych i wszędzie tam, gdzie zależy na umiejętności jednoznacznego przewidywania zjawisk, szukamy stosunków jednoznacznych między nimi tak, aby znajomość jednego członu stosunku pozwalała określić drugi, nieznany jeszcze w danej chwili. Jako takie stosunki jednoznaczne ustala się związki funkcyjne w przypadkach, w których zjawiska dają się mierzyć, albo stosunki wystarczającego uwarunkowania (stosunki przyczynowe).

Matryca stosunku jednoznacznego charakteryzuje się tym, że w każdym jej pionie wypełniony jest co najwyżej jeden węzeł; w matrycy stosunku odwrotnie jednoznacznego wypełniony jest co najwyżej jeden węzeł w każdym wierszu.

2. Odpowiedniość doskonała — Liczby kardynalne

Stosunek, który jest jednoznaczny i zarazem odwrotnie jednoznaczny, nazywa się w matematyce **odpowiedniością doskonałą** lub **funkcją odwracalną**. Wprowadźmy skrót „$DoR\hat{x}\hat{y}$“ zamiast „$R\hat{x}\hat{y}$ jest odpowiedniością doskonałą“. Odpowiedniość doskonała definiuje się w następujący sposób:

522-I „$DoR\hat{x}\hat{y}$“ = ~~„$(x, y, z)KCKRxyRxzIyzCKRxzRyzIxy$“~~

„$R\hat{x}\hat{y}$ jest odpowiedniością doskonałą“ znaczy ~~„dla każdego x, każdego y, oraz każdego z, jeżeli $KRxyRxz$, to Iyz i jeżeli $KRxzRyz$, to Ixy“~~. Z przytoczonych wyżej przykładów funkcjami odwracalnymi są $x-y=5$, $x/y=2$,

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

$(f, g, x)\ ((\Sigma R)^{K}\ \overline{no}\ R\hat{x}\hat{y}\ K,\ C\ fx\ (\Sigma y)\ K\ R_{xy}\ gy\ ((\Sigma y)\ C\ gy)\ K\ R_{xy}\ fy$

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

natomiast nie są funkcjami odwracalnymi $x^2 = y$, $\sin x = y$. Stosunkiem takim w innej dziedzinie jest stosunek ojca do jedynego syna, stosunek sprzeczności między zdaniami itp.

Jeżeli odpowiedniość doskonała istnieje między elementami dwóch zbiorów określonych jako zakresy funkcji propozycjonalnych fx i gx, tak iż każdemu elementowi jednego z tych zbiorów odpowiada jeden i tylko jeden element drugiego, to oba zbiory nazywają się podobne lub równoliczne. Innymi słowy, dwa zbiory są podobne zawsze i tylko, jeżeli istnieje odpowiedniość doskonała, dla której jeden z owych zbiorów jest przedpolem, a drugi — przeciwpolem. Niech „$\overline{Rl}f\hat{x}g\hat{x}$" służy za skrót, zamiast „zakresy $f\hat{x}$ i $g\hat{x}$ są zbiorami równolicznymi". Definiujemy:

522-II „$\overline{Rl}f\hat{x}g\hat{x}$" = „$(ER)K\overline{Do}R\hat{x}\hat{y}K(x)Cfx(Ey)KRxygy(y)Cgy(Ex)\ KRxyfx$"

„$\overline{Rl}f\hat{x}g\hat{x}$" znaczy „dla pewnego: $R : \overline{Do}R\hat{x}\hat{y}$ oraz dla każdego x: jeżeli fx, to dla pewnego y: $KRxygy$, a także dla każdego y: jeżeli gy, to dla pewnego x: $KRxyfx$". Np. małżeństwo w krajach chrześcijańskich jest odpowiedniością doskonałą między elementami zbioru mężów z jednej strony i zbioru żon z drugiej, tak iż zbiór mężczyzn żonatych i zbiór kobiet zamężnych są równoliczne. Podobnie równoliczne są zbiory palców u obu dłoni złożonych jak do modlitwy, zbiory tancerzy i tancerek w polonezie, zbiór biesiadników u stołu i zbiór nakryć na tymże stole itp. Ta właściwość odpowiedniości doskonałej jest podstawą do analizy pojęcia liczby. Ustalając mianowicie odpowiedniość doskonałą między elementami różnych zbiorów, łączymy zbiory równoliczne w zbiory zbiorów i otrzymujemy tak zbiory par, trójek, czwórek; wszystkie bowiem pary są między sobą równoliczne, tak samo trójki itd. Do tych zbiorów równolicznych dołączamy również zbiór jedynek, czyli zbiorów jednostkowych, i zbiór, którego jedynym elementem jest klasa pusta, czyli zerowa. Każdy zbiór zbiorów równolicznych — podobnie zresztą jak każdy zbiór w ogóle — jest scharakteryzowany przez to, że wszystkie należące do niego elementy (zbiory) i tylko one posiadają pewną wspólną własność; jak elementy zbioru, do którego należą śnieg, cukier rafinowany i płatki lilii, są wszystkie białe, tak wspólną własnością wszystkich par jest to, że one i tylko one są dwójkami, czyli mają po dwa elementy, podobnie wszystkie trójki mają po trzy elementy itd.; tę wspólną własność zbiorów równolicznych nazywa się ich mocą lub liczbą kardynalną; *0* jest liczbą kardynalną klasy pustej, *1* jest liczbą kardynalną zbiorów jednostkowych itd. Z uwagi zaś na wzajemne odpowiadanie sobie zbiorów i własności (411) twierdzenia o liczbach kardynalnych można rozumieć jako twierdzenia o odnośnych zbiorach zbiorów równolicznych.

Zbiory definiujemy jako zakresy funkcji propozycjonalnych (316) w definicji liczb kardynalnych wprowadzimy więc na miejsce zbiorów odpowiednie funkcje propozycjonalne. Według ogólnie przez nas przestrzeganej zasa-

dy definiujemy nie wprost liczby kardynalne, lecz funkcje orzeczni-kowe, w których liczby kardynalne występują jako orzeczniki, argumentami zaś są funkcje propozycjonalne indywiduów. Takimi funkcjami orzecznikowymi są „$0f\check{x}$", co czytamy „$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie *0*, tzn. nie obejmującym żadnego przedmiotu", „$1f\check{x}$", czyli „$f\check{x}$ jest funkcją o zakresie *1*, tzn. obejmującym jeden tylko przedmiot" itd.

Definicja liczby kardynalnej *0* brzmi przeto:

522—III „$0f\hat{x}$" = „$(x)Nfx$"

„$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie *0*", znaczy „dla każdego x nieprawda, że fx".

Definicja liczby kardynalnej *1*:

522—IV „$1f\hat{x}$" = „$(Ex)Kfx(y)CfyIxy$"

„$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie *1*" znaczy „dla pewnego x:fx i dla każdego y, jeżeli fy, to x jest identyczne z y-em",

Definicja liczby kardynalnej *2*:

522—V „$2f\hat{x}$" = „$(Ex)(Ey)KNIxyKfxKfy(z)CfzAIxzIyz$"

„$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie *2*", znaczy „dla pewnego x i pewnego y: x i y nie są identyczne, fx, fy i dla każdego z, jeżeli fz, to z jest identyczne bądź z x-em, bądź z y-em".

Wszystkie trzy definicje liczb kardynalnych posiadają w definiens wyłącznie wyrażenia logiczne, funkcje prawdziwościowe, funkcje propozycjonalne, kwantyfikatory i identyczność, która z kolei definiuje się przez kwantyfikator i funkcję propozycjonalną (323,5). Ta okoliczność posiada niezmiernie ważne znaczenie dla analizy podstaw matematyki. Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że definicje liczb wraz z definicjami równości i dodawania, które również dadzą się utworzyć w obrębie wyłącznie logicznych terminów, wystarczają dla zbudowania systemu arytmetyki, to wynika stąd, że wbrew panującemu od wieków, a szczególnie przez Kanta podkreślonemu przekonaniu arytmetyka nie tworzy różnego od logiki systemu dedukcyjnego, lecz jest częścią logiki, tzn. daje się zbudować przy użyciu terminów wyłącznie logicznych. Jedynym założeniem pozalogicznym, które należy uczynić budując system aksjomatyczny arytmetyki, jest a k s j o m a t n i e s k o ń c z o n o ś c i; jest to założenie egzystencjalne, które nie wprowadza nowego terminu, lecz jedynie gwarantuje istnienie dowolnie wielkiej liczby kardynalnej.

Liczby naturalne są identyczne z liczbami kardynalnymi zbiorów skończonych. Istnieją liczby kardynalne różne od liczb naturalnych. Każda liczba naturalna jest liczbą kardynalną jakiegoś zbioru skończonego. Liczb naturalnych jest jednak nieskończenie wiele, albowiem jakkolwiek wielką pomyślimy liczbę naturalną n, to zawsze można dobrać większą od niej liczbę naturalną $n+1$. A k s j o m a t n i e s k o ń c z o n o ś c i stwierdza, że $n+1$ jest różne od wszystkich liczb poprzednio zdefiniowanych. Liczba kardynalna zbioru liczb

x) 575, 9

(x,y) Ɛ ᶜR S_xy ᶜS ᶜR_xy
S/ᶜR
(x,y) Ɛ ᶜR ᶜR_xy ᶜR ᶜR_xy

xx) ᶜR ᶜR_xz ᶜR ᶜR_xv

(Ɛy) ᶜR ᶜR_xy ᶜR ᶜR_yv

(Ɛy) K (Ɛz) K R_xz ᶜR_zy (Ɛz) K R_yz ᶜR_zv
(Ɛy)(Ɛz) KK

ᶜR ᶜR_xy , ᶜR ᶜR_yv
(Ɛy) K ᶜR ᶜR_xy ᶜR ᶜR_yv
(Ɛy) K (Ɛz) K R_xz ᶜR_zy (Ɛz₁) K R_yz₁ ᶜR_z₁v
z = z₁
(Ɛy)(Ɛz) KK R_xz ᶜR_zy K R_yz ᶜR_zv
I_zz = 1

KKK R_xz ᶜR_zy R_yz ᶜR_zv
R_xz ᶜR_zv

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

naturalnych nie jest przeto żadną z liczb naturalnych, nosi ona nazwę liczby pozaskończonej *alef o* (czyt. „alef - zero" — „*alef*" początkowa litera alfabetu hebrajskiego).

Zbiór liczb naturalnych posiada pewną własność, która służy do zdefiniowania n i e s k o ń c z o n o ś c i. Mianowicie istnieją funkcje odwracalne, np. $y = 2x$, ze względu na które zbiór liczb naturalnych staje się podobny do innego zbioru stanowiącego jego część właściwą, w danym przykładzie do zbioru liczb parzystych, każdej bowiem liczbie parzystej y odpowiada liczba naturalna x stanowiąca jej połowę (c z ę ś c i ą w ł a ś c i w ą zbioru Z nazywamy zbiór z zawsze i tylko, jeżeli każdy element zbioru z jest elementem zbioru Z, natomiast istnieją elementy zbioru Z, które nie są elementami zbioru z). Analogiczna własność przysługuje każdemu zbiorowi nieskończonemu, tak iż definiuje się: Zbiór Z jest nieskończony zawsze i tylko, jeżeli posiada podobną sobie część właściwą.

Stosunek podobieństwa między zbiorami równolicznymi jest symetryczny, przechodni i zwrotny. Analogiczne doń pod tym względem są stosunki takie, jak równoważność zdań lub orzeczników, identyczność indywiduów, przystawanie figur geometrycznych, równoległość prostych, rodzeństwo (pochodzenie od tych samych rodziców), ziomkostwo (wspólność ojczyzny) itp. Wszystkie te stosunki są symetryczne, przechodnie i zwrotne, przy czym ostatnia własność wynika z dwóch poprzednich, jeżeli bowiem stosunek Rxy jest symetryczny, to również Ryx, skąd wobec przechodniości wynika Rxx. Każdy stosunek symetryczny, przechodni i zwrotny nazywa się r ó w n o ś c i ą, do czego dodaje się zazwyczaj „pod jakimś względem". Przedmioty równe pod jakimś względem są to przedmioty posiadające jakąś wspólną własność; jest nią dla podobieństwa zbiorów ~~równoliczność~~, dla ziomkowstwa wspólność ojczyzny, dla równoległości wspólność kierunku. Posiadanie takiej wspólnej własności daje się ująć w postaci stosunku, który łączy każdy z przedmiotów o danej własności jednoznacznie z czymś jedynym, czym może być bądź przedmiot indywidualny, bądź przedmiot innego typu, wspólni rodzice rodzeństwa, wspólna barwa przedmiotów jednobarwnych itp. Jeżeli zaś jakiekolwiek dwa przedmioty x i y pozostają w stosunku jednoznacznym R do tego samego przedmiotu z, to stosunek zachodzący między nimi ze względu na tę wspólność jest iloczynem względnym stosunku R i jego konwersji: $\mathfrak{P}R^{c}Rxy$. Ten iloczyn względny jest stosunkiem symetrycznym, przechodnim i w skutek tego także zwrotnym, czyli jest równością. Jest mianowicie symetryczny, ponieważ po skonwertowaniu według tezy 515,9 daje znów ten sam stosunek. Jest zaś przechodni, ponieważ iloczyn względny $\mathfrak{P}R^{c}Rxu$ i $\mathfrak{P}R^{c}Ryv$ daje stosunek tej samej postaci $\mathfrak{P}R^{c}Rxv$; dla dowodu należy wyrażenie $\mathfrak{P}R^{c}R\,\mathfrak{P}R^{c}Rxv$ rozwinąć stosując dwukrotnie definicję 515-I, a następnie wziąć pod uwagę, że przedmioty x, y, v pozostają wszystkie w stosunku jednoznacznym R do tego samego z, co pozwala powołać się na tezy 521,1 i 515,10, aby otrzymać $\mathfrak{P}R^{c}Rxv$.

Tak przeto przedmioty, które posiadają wspólną własność w postaci stosunku jednoznacznego łączącego każdy z nich z jakimś jedynym przedmiotem, są ze względu na ową wspólną własność sobie równe. Na odwrót każdą równość można rozłożyć na iloczyn względny stosunku jednoznacznego i jego odwrotności, gdzie w członie pośrednim występuje wspólna własność przysługująca przedmiotom równym. Takie wyodrębnienie owej wspólnej własności nosi nazwę abstrakcji (jako logiczny odpowiednik abstrakcji psychologicznej), a prawem abstrakcji nazywamy twierdzenie, według którego zawsze i tylko, jeżeli między elementami pewnego zbioru zachodzi stosunek symetryczny, zwrotny i przechodni, istnieje własność wspólna przedmiotom należącym do pola stosunku i charakteryzująca te przedmioty; przez abstrakcję uzyskuje się pojęcie dowolnej liczby jako wspólnej własności klas równolicznych, pojęcie jednakowej temperatury jako wspólnej własności ciał pozostających w równowadze termicznej itp.

Stosunki, podobnie jak równość, symetryczne i zwrotne, lecz nieprzechodnie są jak gdyby równościami przybliżonymi w pewnych granicach. Takim stosunkiem jest podobieństwo ludzkich twarzy lub postaci (ale nie podobieństwo zbiorów i podobieństwo figur w geometrii, te bowiem są przechodnie), sąsiedztwo, jeżeli rozumiemy je jako zamieszkiwanie w oddaleniu nie przekracza jącym pewnej granicy, przyjaźń pojęta jako wspólność upodobań i dążeń w pewnych dziedzinach itp.

3. Stosunki porządkujące — Ciągi i szeregi

Stosunki, które są przeciwsymetryczne, przechodnie i spójne, nazywają się stosunkami porządkującymi. Jako przeciwsymetryczne, są one zarazem przeciwzwrotne; załóżmy bowiem, że stosunek R jest przeciwsymetryczny $CRxy\mathfrak{N}Ryx$ (514-IV), i przypuśćmy Rxx, to $CRxx\mathfrak{N}Rxx$ (522,4), skąd wynika $\mathfrak{N}Rxx$ (512-XI). Nazywamy je porządkującymi, gdyż układają one elementy swego pola w porządek, w którym każdy element ma swoje dokładnie wyznaczone miejsce przez to, że poprzedza według stosunku porządkującego jedne spomiędzy różnych od siebie elementów, a następuje po innych. Każdy stosunek porządkujący jest przeto stosunkiem poprzedzania lub następowania według jakiejś cechy względnej jako zasady. Tak np. liczby porządkuje się według wielkości, barwy neutralne według jasności od czarnej, przez szare coraz jaśniejsze ku białej jako najjaśniejszej, podobnie barwy jednokolorowe — według nasycenia, np. od najjaśniejszej różowej ku najbardziej nasyconej purpurze, tony — według wysokości itp. Porządkowanie odbywa się w ten sposób, że z dwóch elementów x, y — wobec spójności stosunku porządkującego — jeden, np. x, poprzedza drugi; wobec przeciwsymetryczności, jeżeli x poprzedza y, to y nie poprzedza x; wobec przechodniości, jeżeli x poprzedza

y i *y* poprzedza *z*, to *x* poprzedza *z*, poprzedza więc wszystkie elementy poprzedzane przez *y*; wreszcie wobec przeciwzwrotności, żaden element nie poprzedza sam siebie.

Wprowadźmy skrót „$\overline{Ord}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" zamiast „zakres $f\hat{x}$ jest uporządkowany przez stosunek $R\hat{x}\hat{y}$" celem sformułowania definicji:

523—I „$\overline{Ord}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x,y,z)CKKfxfyfzKCRxy\mathfrak{N}RyxKAIxyARxyRyxCKRxyRyzRxz$"

„$\overline{Ord}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" znaczy „dla każdego *x*, każdego *y*, każdego *z*, jeżeli *x*, *y*, *z* należą do zakresu funkcji *f*, to a) jeżeli *Rxy*, to: $\mathfrak{N}Ryx$ (przeciwsymetryczność), b) jeżeli *x* nie jest identyczne z *y*, to *Rxy* lub *Ryx* (spójność) oraz c) *CKRx-yRyzRxz* (przechodniość)."

Zbiór uporządkowany nazywa się c i ą g i e m. Najpospolitsze przykłady ciągów otrzymujemy przez liczenie lub dobieranie kolejne elementów, poczynając od pewnego elementu obranego za początkowy. Ciągi tego rodzaju nazywamy s z e r e g a m i. Szeregiem przeto jest ciąg, w którym istnieje element pierwszy i w którym między każdymi dwoma elementami zawiera się tylko skończona liczba elementów pośrednich. Szeregiem jest ciąg liczb naturalnych *1, 2, 3...* Elementy dowolnego szeregu, np. szeregu uczniów klasy szkolnej według porządku alfabetycznego, możemy policzyć, tzn. przyporządkować każdemu jego elementowi jedną i tylko jedną liczbę szeregu liczb naturalnych. Nie jest natomiast szeregiem np. ciąg liczb całkowitych ujemnych, uporządkowanych rosnąco (od ujemnej nieskończoności do zera) ...—3, — 2, —1, 0, ponieważ nie ma w nim elementu pierwszego; nie jest szeregiem podwojony ciąg liczb naturalnych 1, 2, 3... 1, 2, 3..., ponieważ dla pary elementów wziętych z dwóch jego części nie jest spełniony warunek, by zawierała się między nimi tylko skończona liczba elementów; nie jest też szeregiem ciąg liczb ułamkowych dodatnich przedziału 0.....1, ponieważ wymieniony warunek nie spełnia się dla żadnej pary jego elementów.

Analiza budowy szeregu opiera się na pojęciu d z i e d z i c z e n i a. Pierwowzorem tego stosunku jest międzyludzki stosunek przodka (*antecessor*, ang. *ancestor*) do jego potomków. Stosunek dziedziczenia określa się, jak następuje: Wyrażenie „własność *w* dziedziczy się według stosunku *R*", znaczy tyle, co „przy wszelkim *x* i *y*, jeżeli *x* posiada własność *w* i *Rxy*, także *y* posiada własność *w*"; połóżmy „*fx*" zamiast „*x* posiada własność *w*" i niech „$\overline{Her}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" znaczy „własność *w* dziedziczy się według stosunku *R*", to definicja stosunku dziedziczenia brzmi (w definicji tej członami stosunku $\overline{Her}$ są $f\hat{x}$ i $R\hat{x}\hat{y}$):

523—II „$\overline{Her}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" = „$(x,y)CKfxRxyfy$"

Tak np. nazwisko jest własnością dziedziczną w społeczeństwach europejskich według stosunku ojca do syna, a parzystość — własnością dziedziczną liczb całkowitych według stosunku podzielnika do jego wielokrotności (jeżeli liczba *n*

1	2	3	4	5	6	7
11	12	13	14	15	16	17
21	22	23	24	25	26	27
31	32	33	34	35	36	37
41	42	43	44	45	46	47
51	52	53	54	55	56	57
61	62	63	64	65	66	67
71	72	73	74	75	76	77
81	82	82 [illegible]	84	85	86	87
91	92	93	94	95	96	97

Graphischer Großbetrieb Deutsche Rundschau, Bromberg

jest parzysta, to parzysta jest także każda liczba, która jest wielokrotnością n). Przedmiot y, który pozostaje do x w stosunku R i dziedziczy własność przedmiotu x dziedziczną według tego stosunku, nazywa się sukcesorem przedmiotu x; niech podobnie jakiś przedmiot z będzie sukcesorem przedmiotu y itd., własność dziedziczenia przechodzi w ten sposób na coraz dalszych sukcesorów. Każdy z nich jest descendentem przedmiotu x, ten zaś nazywa się antecessorem wszystkich swoich descendentów (przy czym sukcesora przedmiotu x liczymy również do jego descendentów).

Antecessor i jego descendenci tworzą szereg, w którym antecessor jest elementem pierwszym i w którym sukcesor jakiegokolwiek elementu jest elementem bezpośrednio po nim następującym. Na odwrót, aby utworzyć szereg rozpoczynający się od jakiegoś elementu, wystarczy znaleźć własność charakteryzującą jego elementy i ustalić stosunek, według którego własność ta jest dziedziczną. Tak np. tworzymy szereg a, a^2, a^3.., potęg całkowitych dodatnich liczby a, biorąc pod uwagę podzielność przez a jako własność dziedziczna według konwersji stosunku a-krotności. Szereg liczb naturalnych ma za wyraz pierwszy liczbę 0, a własność oznaczona słowami „jest liczbą" jest dla jego elementów własnością charakterystyczną, dziedziczną według stosunku „większy o 1", co wyraża się zwrotem; „jeżeli n jest liczbą, to $n + 1$ jest również liczbą".

Stosunkiem porządkującym szereg, w którym własność w dziedziczy się według stosunku R, jest stosunek $\mathfrak{A}R \cup R^2 \cup R^3 \ldots$ (mamy bowiem, jeżeli a, b, c, $d\ldots$ są kolejnymi elementami szeregu Rab, R^2ac, R^3ad itd.). Stosunek ten nazywa się stosunkiem ancestralnym z uwagi na to, że łączy on antecessora z jego descendentami. Dla szeregu liczb naturalnych stosunek ancestralny brzmi: „większy o 1 lub większy o 2, lub większy o 3 . . .", tzn. po prostu „większy". Istotną własnością stosunku ancestralnego jest to, że pozwala on osiągnąć dowolny element szeregu descendentów po przejściu skończonej liczby R-owych kroków (przez przejście kroku R-owego rozumiemy przejście od poprzednika do następnika stosunku R). Zasadnicza trudność określenia polega na uchwyceniu sensu kropek „. . ." lub „itd.", którymi wyrażamy nieokreśloną skończoność stosunku. Tę właśnie przezwycięża się przez wprowadzenie pojęcia dziedziczności. Każdy człon szeregu osiągalny w skończonej, choćby bliżej nieokreślonej liczbie kroków, daje się określić jako descendent, na który przechodzi własność dziedziczna; innymi słowy, jeżeli a) stosunek ancestralny zachodzi między u i v, to b) v posiada każdą dziedziczną według stosunku R własność każdego z descendentów u. Na odwrót, jeżeli b) v posiada każdą dziedziczną według stosunku R własność każdego z descendentów u, to między innymi posiada i tę własność, że a) między u oraz v zachodzi stosunek ancestralny. Równoważność między warunkami a) i b) jest podstawą definicji stosunku ancestralnego:

523—III „~~ancest R ∪ R² ∪~~ . . . uv" = „$(f)CKfuHerf\hat{x}R\hat{x}\hat{y}fv$",

„Anc $R\hat{u}\hat{v}$" = „$(\exists S)(f)CKfu\overline{Herf\hat{x}S\hat{x}\hat{y}}fv$ — /$(x,y)CKfxSxyfy$

$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad d = a_n - a_{n-1} = \text{const.}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

Zależność dla [illegible] $a_k = a_1 + (k-1)d$

$a_{k+1} = a_1 + kd$ [illegible] $a_{k+1} = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + (k-1+1)d = a_1 + kd$

prawa strona tej definicji po podstawieniu znaczenia dla „$\overline{Her}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$" według 523—II przyjmuje postać „$(f)CKfu(x\,y)CK^{f}xRxyfyfv$"; przedstawia ona warunek b), mianowicie stwierdza, że dla każdej własności f, jeżeli u posiada tę własność i jest ona dziedziczna według R, także v ją posiada. Stosunek ancestralny, jako porządkujący, winien być przeciwsymetryczny, przechodni i spójny. Ażeby warunek ten był zachowany, winien także stosunek R czynić zadość pewnym warunkom. Tak np. nie otrzymamy szeregu porządkującego zbiór wszystkich ludzi, gdy obierzemy stosunek synowstwa za stosunek R, ponieważ stosunek $\mathfrak{A}R\mathfrak{A}R^2\ldots uv$ nie będzie wówczas spójny. Nie otrzymujemy również szeregu w przypadku tzw. cyklu, tj. uporządkowania, w którym po przejściu pewnej liczby elementów powracamy do elementu początkowego, w tym bowiem przypadku stosunek $\mathfrak{A}R\ R^2\ldots uv$ nie jest przeciwsymetryczny. Przykładem cyklu jest grono biesiadników siedzących dokoła okrągłego stołu, jeżeli za stosunek R obierzemy „sąsiad z prawej".

Na opisanych wyżej własnościach szeregów opiera się metoda dowodu zwana **indukcją matematyczną**. W dowodach tego rodzaju mamy do czynienia z szeregiem elementów i dążymy do wykazania, że pewna własność elementu pierwszego przysługuje także wszystkim innym elementom. Dowód polega na wykazaniu, że dana własność jest dziedziczna w szeregu według stosunku łączącego jakikolwiek jego element (element n-ty) z elementem bezpośrednio po nim następującym (tj. $n+1$-szym). Tak np. dowodzi się indukcją matematyczną twierdzenia, że w szeregu arytmetycznym złożonym z liczb całkowitych $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \ldots$ rozpoczynającym się od a_1, w którym różnica dwóch kolejnych elementów $d = a_n - a_{n-1}$ jest stała, wyraz n-ty posiada postać $a_n = a_1 + (n-1)d$. Zakładamy dla dowodu, że omawiana własność przysługuje wyrazowi a_k, tzn., że dla $n = k$ jest istotnie $a_k = a_1 + (k-1)d$, i dowodzimy, że dziedziczy się ona ze względu na stosunek łączący dowolny wyraz szeregu z wyrazem następnym, tzn. że pod wymienionym założeniem wzór jest słuszny również dla $n = k+1$, jest przeto $a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)d = a_1 + kd$. Rzeczywiście znajdujemy, że $a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd$. Bezpośrednio jest widoczne, że twierdzenie, którego dowodzimy, jest prawdziwe dla wyrazów początkowych, ważne więc jest także ogólnie.

4. Klasyfikowanie i szeregowanie

Mówiąc o opisie naukowym w pewnej dziedzinie badań, ma się zazwyczaj na myśli postępowanie, w którym orzeka się o przedmiotach opisywanych ich własności, przedmioty te przeto zostają podporządkowane pod pewne pojęcia i zaliczone do klas stanowiących zakresy owych pojęć. Opis tak rozu-

miany jest związany najściślej z klasyfikacją; opisując przedmioty dzielimy je zarazem na klasy tworzące układ systematyczny gatunków i rodzajów. Przykładem takiego opisu jest systematyka roślin lub zwierząt oparta na rozróżnieniu typów, gromad, rzędów itd., do których zalicza się opisywane przedmioty.

Opisowi w tym sensie, który nazywać będziemy klasyfikacyjnym, zarzuca się, iż jest sztywny, nie uwzględnia płynnych przejść między przedmiotami, rozrywa opisywaną rzeczywistość na oddzielne, nie wiążące się ze sobą części, budzi nieraz wątpliwości, gdy chodzi o ustalenie granic między rozróżnionymi działami. Jedyny sposób, aby uniknąć wymienionych ujemnych stron opisu klasyfikacyjnego, polega na czynieniu go coraz bardziej szczegółowym, prowadzeniu klasyfikacji coraz niżej, tworzeniu poddziałów coraz bardziej rozgałęzionych; wtedy jednak zatraca się przejrzystość, jedną z istotnych jego zalet.

Logiczna forma opisu klasyfikacyjnego daje się ująć jako szukanie funkcji propozycjonalnych fx, gx, które byłyby prawdziwe i charakterystyczne dla przedmiotów opisywanej dziedziny. Prawa naukowe zaś, ustalane na podstawie opisu klasyfikacyjnego, mają postać implikacji między owymi funkcjami propozycjonalnymi: $Cfxgx$. Przypuśćmy np., że opisujemy pewne przedmioty, orzekając o nich własności u, v, w odpowiadające funkcjom fx, gx, hx, wtedy jakieś prawo naukowe mogłoby mieć postać „$CfxKgxhx$", tzn. stwierdzilibyśmy w nim, że przedmioty posiadające własność u posiadają własności v i w.

Jak przy opisie w powyższym sensie rozkładamy zbiór opisywanych przedmiotów na podzbiory przez klasyfikację, tak znów porządkowanie zbiorów przez układanie ich elementów w ciągi lub szeregi jest podstawą odmiennej metody opisu, opisu szeregującego — metody stosowanej w psychologii, antropologii i innych naukach. W opisie szeregującym, zamiast orzekać własności opisywanych przedmiotów, porównujemy te przedmioty ze sobą pod pewnym względem, ustalając przez to ich kolejność w szeregu. Np. w badaniu inteligencji uczniów za pomocą testów szeregujemy jednostki badane według inteligencji opierając się na ilości błędów w rozwiązywaniu testów. Podobnie opisując minerały ustalamy ich kolejność w szeregu twardości na tej podstawie, że twardszy jest minerał, który zarysowuje powierzchnię drugiego, sam natomiast nie daje się zarysować wzajemnie. Porównując opis klasyfikujący z szeregującym można by powiedzieć, że w pierwszym orzekamy o przedmiotach własności w stopniu pozytywnym (np. x jest twarde), w drugim orzekamy je porównawczo lub w stopniu wyższym — komparatywnie — np. x jest twardsze od y, A jest bardziej inteligentny od B, nie rozstrzygamy jednak bynajmniej, czy bezwzględnie biorąc zaliczymy w pierwszym przykładzie x do minerałów twardych lub miękkich, w drugim przykładzie — A do uczniów inteligentnych lub nieinteligentnych.

Opis szeregujący pod względem formy logicznej jest formułowaniem funkcji propozycjonalnych dwóch argumentów fxy, które wyznaczają porządek elementów x i y; stosunek porządkujący $f\hat{x}\hat{y}$ jest, jak wiemy, przeciwsymetryczny, przeciwzwrotny i przechodni. Może się zdarzyć, że dwa opisywane przedmioty są pod względem, który bierzemy w opisie pod uwagę, równe sobie, tak np., gdy dwaj uczniowie popełnią równą liczbę błędów w teście inteligencji. Aby uwzględnić i takie przypadki, trzeba wprowadzić oprócz stosunku porządkującego $f\hat{x}\hat{y}$ stosunek równości $g\hat{x}\hat{y}$ badanych przedmiotów. Alternatywa $AfxyAfyxgxy$ wyczerpuje wtedy trzy możliwości, zachodzące dla każdych dwóch przedmiotów x i y tzn. bądź x poprzedza y, bądź y poprzedza x, bądz oba zajmują w szeregu to samo miejsce.

Opis szeregujący posługuje się często pojęciem **typu**, stąd bywa nazywany opisem **typologicznym**. Typem jest człon szeregu wyróżniony w tym celu, aby przedmioty opisywane można było scharakteryzować przez ich mniejszą lub większą odległość od przyjętego typu w szeregu. Tak np. w tzw. teorii konstytucyjnych typów psychoficznych, której twórcą jest E. Kretschmer, a której zadaniem jest opis konstytucji psychofizycznej człowieka, opisuje się dwa przeciwne typy konstytucyjne, typ schizoidalny i typ cykloidalny, podając pewne charakterystyczne dla nich cechy budowy cielesnej i psychiki. Typy te tworzą dwa końce (bieguny) szeregu, w którym rozmieszcza się wszystkie badane jednostki bliżej lub dalej od bieguna, zależnie od stopnia wykazywanych cech konstytucyjnych. W innych przypadkach wyróżnia się jako typ człon szeregu reprezentowany najliczniej w zbiorze badanych przedmiotów lub człon wyposażony w cechy przeciętne dla danej dziedziny itp. Typ nazywa się **empirycznym**, jeżeli został wybrany spomiędzy empirycznie występujących członów szeregu, tj. opisywanych jednostek; nazywa się **idealnym**, jeżeli został utworzony jako konstrukcja pojęciowa i wyposażony w pewien zespół cech, choćby nawet empirycznie nie był reprezentowany przez żadną z opisywanych jednostek. Także w opisie klasyfikacyjnym jest niekiedy mowa o typach opisywanych, w innym jednak znaczeniu aniżeli w opisie szeregującym. Albowiem typem w opisie klasyfikacyjnym jest gatunek lub rodzaj, pod który podporządkowujemy przedmioty opisywane; przenośnie nazywa się zaś typem jednostkę, w której szczególnie wyraźnie występują cechy gatunkowe lub rodzajowe, niekiedy zaś także okaz wzorcowy, według którego został określony rodzaj lub gatunek.

Opis szeregujący przechodzi w opis klasyfikacyjny przez rozcięcie szeregu na klasy obejmujące bliskie sobie człony szeregu, tak np. teoria typów konstytucyjnych, szeregując ludzi między dwoma biegunowymi typami schizoidalnym i cykloidalnym, daje klasyfikację badanych jednostek na schizotymików, cyklotymików i grupę pośrednią, jeżeli szereg zostanie rozcięty na trzy części w pewnej odległości od obu biegunów. Szereg minerałów uporządkowanych według

stopnia twardości może być podobnie rozcięty na grupę minerałów miękkich (np. od 1 do 3 stopnia skali) i twardych (od 4 do 10 stopnia skali).

Opis szeregujący występuje najczęściej w badaniach statystycznych i służy tam za podstawę do zastosowania specjalnych metod statystycznych, w szczególności do obliczenia przeciętnych różnego rodzaju, do wyznaczania liczebności jednostek występujących w poszczególnych częściach szeregu lub granic, w których są zamknięte przypadki skrajne.

Opis szeregujący jest metryczny (miarowy), gdy następujące po sobie człony szeregu dają się przedstawić liczbowo w jednostkach wspólnej miary. Nie zawsze jednak przypadek ten zachodzi. Tak np. opis szeregujący barw nasyconych, układający je według jakości barwnych, lub takiż opis tonów ułożonych według wysokości, nie jest opisem metrycznym, ponieważ elementy jednego, jak i drugiego szeregu nie dają się wymierzyć w jednostkach wspólnej miary. Nie jest metryczny opis szeregujący jednostki ludzkie między dwoma biegunowymi typami schizoidalnym i cykloidalnym. Natomiast metryczny jest opis szeregujący poborowych pewnego rocznika według wzrostu; można też uczynić metrycznym np. opis szeregujący uczniów szkoły według inteligencji, ustalając konwencjonalnie jednostkę miary na podstawie liczby błędów poczynionych przy rozwiązywaniu testu.

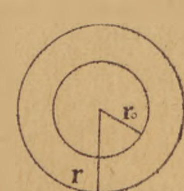
Opis szeregujący prowadzi do praw naukowych podobnie, jak opis klasyfikacyjny. W prawach tego rodzaju zostaje stwierdzone, że jeżeli indywidua x i y należą oba do dwóch różnych szeregów, to następstwo ich w jednym z tych szeregów wyznacza ich następstwo w drugim z nich. Tak np., gdyby można było sformułować prawo: Uczniowie bardziej inteligentni czynią lepsze postępy w nauce szkolnej niż uczniowie mniej inteligentni, to stwierdzałoby ono, że jeżeli uczeń A stoi w szeregu inteligenncji (ustalonym np. na podstawie zastosowania jakiegoś testu) na wyższym miejscu aniżeli uczeń B, to również w szeregu lokacyjnym według postępów szkolnych lokacja A byłaby wyższalo niż kacja B.

Jeżeli szeregi, między którymi ustala się tego rodzaju związek ogólny w jakimś prawie naukowym, są szeregami metrycznymi, to prawo przybiera postać matematycznego związku funkcyjnego, w którym elementy jednego szeregu są wartościami argumentu, elementy drugiego szeregu — wartościami funkcji. Przypuśćmy, że grupę robotników pobierających jednakowe wynagrodzenie dzienne szeregujemy a) według liczby przepracowanych dni oraz b) według wysokości zarobku. Niech x oznacza liczbę dniówek, y — wysokość zarobku w jednostkach monetarnych, N — wynagrodzenie dzienne w tych jednostkach; funkcja $y = Nx$ wyraża prawo ustalające zależność między liczbą dniówek a wysokością zarobku; według tego prawa wartość zmiennej x wyznaczającej miejsce robotnika w szeregu a) określa wartość funkcji y wyznaczająca miejsce tegoż robotnika w szeregu b).

5. Szeregujące logiki wielowartościowe

Rozróżnienie między klasyfikacją i szeregowaniem jest punktem wyjścia innego uogólnienia logiki dwuwartościowej na logikę wielowartościową aniżeli to, które wychodzi od rozróżnienia modalności zdań i o którym była mowa poprzednio (242). Każde zdanie jednostkowe logiki dwuwartościowej, np. „dziś jest pogoda", związane jest z podziałem dychotomicznym przedmiotów pewnej klasy, do której należy desygnat podmiotu zdania, na dwie podklasy takie, iż dla jednej z nich zdanie to jest prawdziwe, dla drugiej — fałszywe; w przytoczonym przykładzie klasa dni rozpada się na podklasę dni pogodnych, dla których zdanie jest prawdziwe, i podklasę dni niepogodnych, dla których jest ono fałszywe. Jednakże można też klasę dni uszeregować według stanu pogody postępując od zupełnej pogody do zupełnej niepogody i pytać nie o to, czy dzień jest pogodny, lecz w jakim stopniu jest pogodny; wtedy zdanie „dziś jest pogoda" może być uważane za prawdziwe w stopniu mniejszym lub większym, zależnie od takiego lub innego stanu pogody. Jego prawdziwość staje się zależna od miejsca, które w szeregu uporządkowanym od zupełnej pogody do zupełnej niepogody zajmuje odpowiadający mu stan rzeczy.

Aby określić stopień prawdziwości zdania przy takim jej pojmowaniu w sposób jak najbardziej naoczny, wyjdziemy od innego przykładu. Przypuśćmy, że strzelec strzela do tarczy, i niech prawdziwość zdania (*a*) „strzał jest celny" ma stopień zależny od tego, w jakiej odległości od środka tarczy utkwiła kula. Oznaczmy maksymalny stopień prawdziwości zdania liczbą „*1*", gdy kula utkwi dokładnie w środku tarczy — i niech stopień prawdziwości będzie tym mniejszy, w im większej odległości *r* od środka tarczy leży miejsce trafienia. Niech przeto stopień prawdziwości zdania (*a*) oznaczony symbolem $V(a)$ będzie ułamkiem $V(a) = \frac{1}{1+r}$, tak iż dla $r = 0$ mamy $V(a) = 1$, dla $r = \infty$, $V(a) = 0$, dla wszelkich zaś innych dodatnich wartości r — $V(a)$ jest ułamkiem właściwym przedziału $0 \ldots\ldots 1$, przy czym owe liczby pełnią rolę indeksów porządkujących, a można je też uważać za konwencjonalną miarę prawdziwości.



Rys. 24

Przejście od tak określonej wielowartościowości do dwuwartościowości może nastąpić w jeden z dwóch sposobów:

a) Przyjmujemy jakąś wielkość $r = r_0$ (rys. 24), która dzieli wszystkie odległości *r* na dwie klasy, $r \leqslant r_0$ oraz $r > r_0$; odpowiednio wartość $V_0(a) = \frac{1}{1+r_0}$ dzieli wartości $V(a)$ na $V(a) \geqslant V_0(a)$ oraz $V(a) < V_0(a)$, przy czym przyjmujemy, że zdanie (*a*) jest prawdziwe, gdy $r \leqslant r_0$ (gdy kula padnie wewnątrz czarnego koła w centrum tarczy) oraz $V(a) \geqslant V_0(a)$, natomiast jest fałszywe, gdy $r > r_0$

i $V(a) < V_0(a)$. Przechodzimy w ten sposób od skali wielowartościowej do dychotomii odpowiadającej dwuwartościowości zdań, ze stratą na dokładności wypowiedzi, gdyż nie rozróżnia się teraz między sobą odległości r leżących po jednej stronie koła r_0.

b) Drugi sposób przejścia do zdań dwuwartościowych nie pociąga za sobą powyższej niedogodności. Polega on na utworzeniu zdania (a_1) o prawdziwości zdania (a) w myśl następującej definicji:

$$(a_1) = \left[V(a) = \frac{1}{1 + r_1} \right],$$

przy czym zdanie (a_1) jest zdaniem dwuwartościowym, jest ono prawdziwe, gdy $r = r_1$, fałszywe — w przeciwnym przypadku. Zdanie (a_1) czytamy „zdanie (a) jest prawdziwe w stopniu $\frac{1}{1 + r_1}$", co można też wyrazić równoważnie słowami „kula trafiła w odległości r_1 od środka".

Dla zbudowania logiki wielowartościowej zdań rodzaju (a) należy jeszcze zdefiniować ich funkcje prawdziwościowe metodą matrycową lub aksjomatyczną, podobnie jak to widzieliśmy poprzednio dla logik wielowartościowych modalności. Uczynimy to tworząc matryce dla negacji oraz implikacji, jak następuje: Niech p, q będą dwiema liczbami oznaczającymi stopnie prawdziwości dwóch zdań; wyrażenia „Np", „Cpq", rozumiemy analogicznie do wyrażeń „Nv", „Nf", „Cfv" itp. przy tworzeniu matryc logiki dwuwartościowej (241), tzn. jako wartości negacji lub implikacji dla wartości p, q ich argumentów. Wartość funkcji Np ustala identyczność

$$Np = 1 - p,$$

wartość Cpq jest określona jako

$$Cpq = 1 \text{ dla } p \leqslant q \text{ oraz } Cpq = 1 - p + q \text{ dla } p > q$$

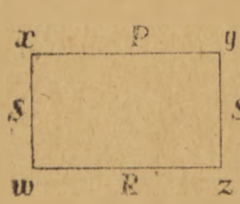
Przy takim określeniu funkcji prawdziwościowych wartości ich dla skrajnych wartości argumentów p, q, tj. 0 i 1, stają się identyczne z wartościami logiki dwuwartościowej, gdy położymy $v = 1$ i $f = 0$; jeżeli nadto położymy $m = {}^1/_2$, wartości implikacji i negacji dla wymienionych trzech wartości argumentów stają się identyczne z ich wartościami dla trójwartościowej logiki modalnej.

Powyższe rozważania pouczają nas, że dwuwartościowość logiki klasycznej jest konsekwencją dychotomicznej zasady podziału, którą wprowadza w dziedzinę rzeczywistości przyjęte w języku potocznym i w logice pojęcie negacji. Jeżelibyśmy tę dychotomiczność zastąpili jakąś inną zasadą porządkowania rzeczywistości, podziałem wieloczłonowym lub szeregowaniem, otrzymalibyśmy, jak to okazuje się na omówionym przykładzie, inną wielowartościową logikę. Z tego punktu widzenia można zasadę dwuwartościowości porównać z zasadą dziesiątkowego układu liczbowego przyjętego w arytmetyce europejskiej. Jak ów układ liczbowy jest zbudowany na liczbie 10 jako podstawie, ze względu na płynące stąd dogodności, lecz z punktu widzenia teoretycznego wybór taki jest

konwencjonalny, tak dwuwartościowość w logice, dogodna z wielu względów, a przede wszystkim zgodna z językiem potocznym, mogłaby być zastąpiona przez układ innych wartości logicznych.

6. Strukturalne własności stosunków i liczby porządkowe

Odpowiedniość doskonała między elementami dwóch klas pozwala określić podobieństwo między tymi klasami oraz ich liczbę kardynalną (522). Podobnie odpowiedniość doskonała między elementami zakresów dwóch stosunków prowadzi do określenia p o d o b i e ń s t w a lub i z o m o r f i c z n o ś c i stosunków. Odpowiedniość doskonałą między zakresami stosunków określamy za pomocą odpowiedniości doskonałej między elementami pól tych stosunków. Niech będą dwa stosunki $P\hat{x}\hat{y}$, $R\hat{w}\hat{z}$; zakładamy dla uproszczenia, że oba one są homogeniczne. Jeżeli pola obu stosunków są zbiorami równej mocy i jeżeli istnieje jednoznaczny i zarazem odwrotnie jednoznaczny stosunek S, który każdemu elementowi pola stosunku $P\hat{x}\hat{y}$ przyporządkowuje pewien element pola stosunku $R\hat{w}\hat{z}$, to zarazem każdej parze uporządkowanej xy zakresu stosunku $P\hat{x}\hat{y}$ zostaje przyporządkowana jednoznacznie i zarazem odwrotnie jednoznacznie para uporządkowana wz elementów pola stosunku $R\hat{w}\hat{z}$, ta mianowicie, dla której Sxw oraz Syz. Stosunek $P\hat{x}\hat{y}$ jest i z o m o r f i c z n y ze stosunkiem $R\hat{w}\hat{x}$ zawsze i tylko, jeżeli każda taka para wz przyporządkowana parze xy należącej do zakresu stosunku $P\hat{x}\hat{y}$ należy do zakresu stosunku $R\hat{w}\hat{z}$ i odwrotnie. Definicję można wypowiedzieć jeszcze w słowach następujących: Dwa stosunki $P\hat{x}\hat{y}$ i $R\hat{w}\hat{z}$ są podobne lub izomorficzne zawsze i tylko, jeżeli istnieje taki korelator S, iż dla każdej pary elementów pola stosunku P, dla których Pxy między ich korelatami w i z w polu stosunku $R\hat{w}\hat{z}$ zachodzi Rwz. Izomorficzność sto-sunków P, R według korelatora S jest równoważna równoważności między Pxy i $\mathfrak{P}S\mathfrak{P}R^{\smile}Sxy$, co ilustruje rys. 25.



Rys. 25

Dla zdefiniowania izomorficzności dwóch stosunków $P\hat{x}\hat{y}$, $R\hat{w}\hat{z}$ wprowadźmy skrót „$\overline{Iz}P\hat{x}\hat{y}R\hat{w}\hat{z}$", zamiast „stosunek $P\hat{x}\hat{y}$ jest izomorficzny ze stosunkiem $R\hat{w}\hat{z}$":

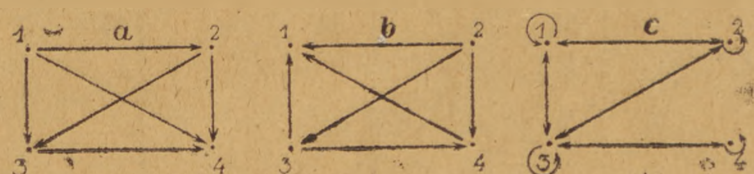
526-I „$\overline{Iz}P\hat{x}\hat{y}R\hat{w}\hat{z}$" = „$(ES)K\overline{Do}S\hat{x}\hat{y}(x,y)\,CPxy(Ew)(Ez)KKSxwSyzRwz$"

„$\overline{Iz}P\hat{x}\hat{y}R\hat{w}\hat{z}$" znaczy „dla pewnego S: S jest odpowiedniością doskonałą i dla każdego x oraz każdego y: jeżeli Pxy, to dla pewnego w i pewnego z : $KSxwSyz$ oraz Rwz".

Stosunek $R\hat{w}\hat{z}$ izomorficzny ze stosunkiem $P\hat{x}\hat{y}$ według korelatora S nazywa się o b r a z e m (o d w z o r o w a n i e m) stosunku $P\hat{x}\hat{y}$ według tegoż korelatora. Izomorficzność stosunków jest, analogicznie jak równoliczność dla klas, równością, tzn. stosunkiem symetrycznym, przechodnim i zwrotnym. Sto-

sunki izomorficzne do pewnego stosunku tworzą klasę stosunków scharakteryzowanych przez wspólną własność. Własność tę nazywamy **strukturą** lub **liczbą porządkową** (ang. *ordinal number*, niem. *Ordnungszahl*) danych stosunków — analogicznie do liczby kardynalnej przy klasach. Liczby porządkowej nie należy mieszać z kategorią gramatyczną liczebników porządkowych, liczebnik porządkowy jest nazwą kolejnego elementu w szeregu, którego elementy zostały ponumerowane.

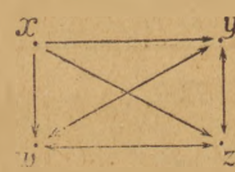
Strukturę stosunku otrzymujemy przez abstrakcję zarówno od jakości jego członów, jak też od jakości jego samego. Przykładem stosunków izomorficznych są z jednej strony stosunki przestrzenne określające położenie jednostek geograficznych w krajobrazie, z drugiej strony odpowiadające im stosunki przestrzenne między punktami oznaczającymi owe jednostki geograficzne na mapie. Izomorficzność zostaje zachowana nawet przy odrzuceniu odpowiedniości metrycznej (którą określa podziałka mapy); nawet mapy schematyczne zniekształcone w wymiarach, jak np. schematy sieci kolejowych w rozkładach jazdy, przedstawiają odwzorowywane stosunki izomorficznie. Strukturę stosunku przedstawia graficznie jego **diagram** (podobnie jak matryca przedstawia jego zakres). Diagram stosunku otrzymujemy przedstawiając elementy jego pola za pomocą punktów na płaszczyźnie i rysując strzałkę od każdego elementu należącego do przedpola ku odpowiedniemu elementowi przeciwpola. Jeżeli do zakresu stosunku należy para xx, to zaznacza się ją strzałką zwrotną od elementu x ku niemu samemu; jeżeli należą do zakresu pary xy i yx, to oba elementy łączymy strzałką podwójną. Rys. 26 przedstawia diagramy dla stosunków a, b, c, których matryce podaje rys. 23 (511).



Rys. 26

Tablice genealogiczne są diagramami stosunków ancestralnych w obrębie pewnego rodu ludzkiego. Diagram, w którym elementy pola są oznaczone przez zmienne, gdy przyjmiemy, że wartościami ich są odpowiadające sobie według pewnego korelatora S elementy pól stosunków izomorficznych, unaocznia strukturę każdego z owych stosunków. Niech będzie M ojcem, A, B, C — jego dziećmi; N — nauczycielem, D, E, F — jego jednoczesnymi uczniami; O — przełożonym, G, H I, — jego równorzędnymi podwładnymi. Stosunki rodzinne w pierwszym, szkolne w drugim i służbowe w trzecim przykładzie są izomorficzne. Strukturę ich otrzymamy oznaczając zmienną x ojca M, nauczyciela N i przełożonego O, zmiennymi zaś y, z, w odpowiednio osoby A, D, G —

B, E H, — *C, F, I.* Diagram (rys. 27) przedstawia nam stosunek ojcostwa lub rodzeństwa w pierwszym przypadku, stosunek nauczycielstwa lub koleżeństwa — w drugim i stosunek przełożeństwa lub współpracownictwa zawodowego — w trzecim.



Rys. 27

Jedno z najprostszych zastosowań izomorficzności dotyczy ciągów (523)

Dwa ciągi są izomorficzne zawsze i tylko, jeżeli między ich elementami daje się ustalić korelator, przy którym związki porządkowe między odpowiednimi elementami w obu ciągach są jednakowe. Jeżeli x i y są jakimikolwiek dwoma elementami ciągu P, zaś w i z — ich korelatami w ciągu izomorficznym Q oraz x jest wcześniejsze od y w ciągu P, to w jest wcześniejsze od z w ciągu Q — i odwrotnie.

Wszystkie ciągi skończone o tej samej liczbie n elementów są izomorficzne. Albowiem elementy każdego takiego ciągu dają się ponumerować, tzn. uporządkować tak, jak ciąg pierwszych n liczb naturalnych, każdy taki ciąg jest więc izomorficzny z ciągiem n pierwszych liczb naturalnych. Dla zbiorów skończonych zatem istnieje całkowity paralelizm między liczbami kardynalnymi i liczbami porządkowymi. Natomiast równoliczne zbiory nieskończone nie muszą być izomorficzne. Każdy taki zbiór może dać po uporządkowaniu różne ciągi nieizomorficzne między sobą. Tak np. nie są izomorficzne szereg liczb całkowitych dodatnich *1, 2, 3* ..... i ten sam szereg uporządkowany odwrotnie ..... *3, 2, 1*, albowiem w pierwszym szeregu istnieje element pierwszy, nie ma zaś ostatniego, w drugim natomiast, przeciwnie, nie ma elementu pierwszego, istnieje zaś ostatni. Przypuśćmy, że elementowi *1* z pierwszego szeregu został przyporządkowany element k z drugiego szeregu; w tym drugim szeregu istnieje zawsze element k_w wcześniejszy od elementu k, natomiast w pierwszym szeregu element *1* jest wcześniejszy od wszystkich innych, a zatem i od elementu, który jest korelatem elementu k_w.

Podobne do powyższego rozumowania okazują, że struktury ciągów nieskończonych scharakteryzowane są przez następujące własności: a) posiadanie lub nieposiadanie elementu pierwszego; b) posiadanie lub nieposiadanie elementu ostatniego; c) różnice przekrojów. Przekrojem zbioru uporządkowanego U nazywa się każdy podział wszystkich elementów tego zbioru na dwie klasy A i B niepuste i takie, iż każdy element klasy A jest wcześniejszy od każdego elementu B. Może być przy tym, że klasa A posiada element ostatni lub go nie posiada, klasa B natomiast posiada element pierwszy lub go nie posiada. Jeżeli w danym przekroju klasa A posiada element ostatni, a zarazem klasa B posiada element pierwszy, to mówimy, że przekrój ów daje skok. Jeżeli natomiast ani A nie posiada elementu ostatniego, ani B — elementu pierwszego, to mówimy, że przekrój daje lukę. Zbiór uporządkowany nie mający skoków

nazywa się gęstym, nie mający skoków ani luk — ciągłym. Tak.np. zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich *1, 2, 3* ..... posiada element pierwszy, nie posiada elementu ostatniego, nie jest gęsty ani ciągły. Zbiór zaś liczb wymiernych a takich, iż $0 \leqslant a \leqslant 1$ jest równoliczny z poprzednim (posiada tę samą liczbę kardynalną), lecz posiada inną liczbę porządkową, gdyż różni się od poprzedniego tym, że jest gęsty. Gdy nadto zbiór liczb wymiernych przedziału $0 \leqslant a \leqslant 1$ uzupełnimy dołączając doń liczby niewymierne w tymże przedziale, powstanie zbiór ciągły.

Struktura stosunku określa całkowicie jego własności formalne, tzn. zależne jedynie od identyczności lub różności jego członów, z pominięciem wszelkich innych różnic między nimi. Wszystkie własności stosunków, jakie poprzednio były omawiane, symetryczność, przechodniość, spójność, zwrotność, jednoznaczność, zależą wyłącznie od struktury stosunku, tak iż stosunki izomorficzne mają jednakowe z wymienionych własności. Własności te noszą nazwę strukturalnych. Każda z nich jest określona całkowicie przez własności dające się uzmysłowić w diagramie strukturalnym stosunku; diagramy zaś takie dla stosunków izomorficznych są identyczne. Natomiast nie są strukturalnymi te własności stosunków, według których dzielimy je np. na geometryczne, logiczne, przestrzenne, społeczne itp.

Pojęcie własności strukturalnych posiada doniosłość poznawczą w następującym jeszcze związku. Wrażenia zmysłowe, jako elementy poznania rzeczywistości empirycznej, są subiektywne i wewnętrzne, zbudowana na nich wiedza posiada również te właściwości: jest subiektywna, tzn. związana z doznaniami podmiotu poznającego, i jest wewnętrzna, tzn. właściwa każdemu poznającemu umysłowi z osobna, niekomunikowalna i nieporównywalna między nimi. Czerwień jest treścią mego wrażenia zmysłowego, czerwieni doznawanej przeze mnie nie potrafię nikomu innemu przekazać ani też porównać jej z czerwienią doznawaną przez kogokolwiek innego. Jednakże jeżeli stoimy w teorii poznania na stanowisku realizmu, które jest na ogół stanowiskiem praktyki naukowej, to przyjmujemy, że między dziedziną obiektywnych przedmiotów wiedzy i dziedziną wrażeń zmysłowych istnieje izomorfizm, a wobec przechodniości izomorfizmu także obrazy świata w poszczególnych umysłach są izomorficzne.

Przy tym założeniu powstaje zagadnienie zbudowania systemu wiedzy, który by był pozbawiony subiektywnych i wewnętrznych elementów zmysłowych i zawierał jedynie to, co należy do własności izomorficznych i co wskutek tego byłoby intersubiektywnie porównywalne i komunikowalne. Należało by w tym celu wszelkie opisy zawierające elementy zmysłowe zmienić na opisy strukturalne, tj. opisy, w których przedmiot opisywany byłby scharakteryzowany wyłącznie przez strukturalne własności stosunków łączących go z innymi przedmiotami. Wyobraźmy sobie w tym celu diagram wszechświata jako mapę, w której poszczególne punkty przedstawiające oddzielne indywidua byłyby połączone ze sobą strzałkami oznaczającymi stosunki, podobnie jak na schematach

sieci kolejowych w rozkładach jazdy stacje kolejowe połączone są liniami kolejowymi. Mapę tę należy pomyśleć jako ślepą, poszczególne jej punkty nie są oznaczone nazwami ani też w żaden inny sposób wyróżnione i zadaniem naszym jest rozróżnić je między sobą wyłącznie według strukturalnych różnic wśród połączeń między nimi. Możliwość naukowego poznania rzeczywistości zależy od tego, czy i w jakim stopniu wspomniane rozróżnienie da się wykonać. Jeżeliby wszystkie własności strukturalne stosunków, w których dwa jakieś indywidua pozostają do wszystkich innych indywiduów, były identyczne, to owe dwa indywidua byłyby w danym systemie wiedzy (w myśl zasady *identitatis indiscernibilium*) nierozróżnialne i identyczne.

Naukami, w których wyeliminowane są wszelkie dane zmysłowe, są nauki matematyczne wraz z logiką. Zajmują się one wyłącznie strukturalnymi własnościami przedmiotów swej dziedziny badania, a każdy występujący w nich związek jest zdefiniowany przez własności strukturalne, tak iż nauki te — można powiedzieć — operują nie stosunkami indywidualnymi, lecz zbiorami stosunków izomorficznych; rozróżnienie między poszczególnymi stosunkami należącymi do takiego zbioru odbywa się drogą interpretacji (212). Postawione wyżej zagadnienie wyeliminowania z nauki elementów zmysłowych jest równoznaczne z zagadnieniem przekształcenia nauk empirycznych na nauki typu matematycznego, czyli ich sformalizowania.

Część 6

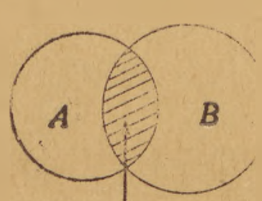
Teoria prawdopodobieństwa

Rozdział 1. Stosunek prawdopodobieństwa

1. Prawdopodobieństwo jako granica częstości

Zdaniami modalnymi nazywa się zdania, w których stwierdza się konieczność, możliwość lub niemożliwość (por. 242). Rozróżnieniu temu odpowiadają trzy stosunki, w których dwie funkcje propozycjonalne fx, gx pozostają względem siebie ze względu na swoją prawdziwość: a) $(x)Cfxgx$, b) $(x)CfxNgx$, c) $K(Ex)NCfxgx(Ex)NCfxNgx$. Są to stosunki konieczności, niemożliwości i możliwości; mianowicie w przypadku a), jeżeli fx, to musi być gx; w przypadku b), jeżeli fx, to nie może być gx; w przypadku c), jeżeli fx, to może być gx lub Ngx. Taka klasyfikacja jest jednak zbyt sumaryczna: umiemy przedstawić dokładniej stosunek prawdziwościowy dwóch funkcji propozycjonalnych, przechodząc do ujęcia szeregującego (524) różnych jego przypadków i wprowadzając w tym celu pojęcie prawdopodobieństwa.

Przypuśćmy, że w zakresie zmienności zmiennej x na n przypadków, w których fx (niech „fx" znaczy np. „x jest jabłkiem"), zachodzi m przypadków, w których gx (niech „gx" znaczy np. „x jest robaczywe"). Liczba m/n jest zerem, gdy w żadnym z n przypadków, w których fx, nie jest prawdą, że gx; jedynką, gdy w każdym przypadku, w którym fx, także gx, a ułamkiem właściwym, gdy w niektórych tylko przypadkach prawdziwości zdania fx także gx. Iloraz m/n nazywamy częstością gx względem fx lub krócej — częstością względną gx. Tak np. gdy w pewnej liczbie obserwacji okazało się, że na siedem jabłek jedno jest robaczywe, częstość względna jabłek robaczywych jest $1/7$. Częstość względną ujmujemy w przedstawieniu graficznym (rys. 28) zakresów A (zakres funkcji fx) i B (zakres funkcji gx) jako stosunek powierzchni części wspólnej obu zakresów, którą oznaczmy symbolem (AB), do powierzchni zakresu, tj. A jako $(AB) : A$.



Rys. 28

Przy pewnych założeniach umiemy przewidzieć, iż gdy n wzrasta nieograniczenie, częstość m/n,

począwszy od pewnej wartości dla n, różni się dowolnie mało od określonej liczby p; mówi się wtedy — posługując się zwrotem matematyki — iż częstość m/n zmierza do granicy p.

Stosunek między funkcjami fx i gx nazywa się stosunkiem prawdopodobieństwa w stopniu p, jeżeli p jest granicą częstości gx względem fx dla n wzrastających nieograniczenie; gdy n posiada wartość skończoną, tzn. gdy istnieje tylko skończona ilość przypadków, w których fx, stopień prawdopodobieństwa jest wprost równy częstości m/n. Stosunki prawdopodobieństwa układają się w szereg według wzrastających stopni począwszy od stopnia zerowego poprzez wartości ułamków właściwych aż do jedności.

Stosunek prawdopodobieństwa między funkcjami propozycjonalnymi fx, gx oznaczamy symbolem „$C_p fxgx$", w którym „p" jest liczbą przedziału $0 \leqslant p \leqslant 1$:

611 — I „*Jeżeli* fx, *to prawdopodobnie w stopniu* p gx" = „$C_p fxgx$"

Stosunek $C_p fxgx$ nazywamy prawdopodobieństwem w stopniu p od fx do gx. Np. przez prawdopodobieństwo w stopniu p trafienia kulą ptaka w locie należy rozumieć stosunek: Jeżeli x strzela kulą do lecącego ptaka, to prawdopodobnie w stopniu p x trafia tego ptaka. Podobnie prawdopodobieństwo wyrzucenia kostką liczby 6 jest stosunkiem: Jeżeli x rzuca kostką, to prawdopodobnie w stopniu p x wyrzuca liczbę 6. Zmienna x reprezentuje bądź tę samą osobę w różnych czasach, bądź różne osoby.

Symbol $C_p fxgx$ zastępujemy pożytecznie w niektórych przypadkach innym jeszcze, mianowicie, jeżeli p jest stopniem prawdopodobieństwa od fx do gx i $p = q$, to stosunek prawdopodobieństwa od fx do gx może być przedstawiony dwojako według następującej definicji:

$$611\text{-}II \quad „C_q fxgx" = „KC_p fxgx(p=q)".$$

Zdanie „jeżeli fx, to prawdopodobnie w stopniu q gx", znaczy to samo, co „jeżeli fx, to prawdopodobnie w stopniu p gx i p jest równe q". Drugi sposób oznaczania prawdopodobieństwa jest stosowany wówczas, gdy q jest wyrażeniem złożonym (iloczynem, ilorazem lub tp.) i użycie go w postaci wskaźnika byłoby niedogodne.

Wyznaczanie stopnia prawdopodobieństwa odbywa się częstokroć empirycznie przez wykonywanie prób, obserwację i obliczenia statystyczne. Tak może strzelec na podstawie wielu prób stwierdzić, iż uzyskuje 60% trafień strzelając kulami do lecących ptaków. Mówimy w takich przypadkach o prawdopodobieństwie empirycznym. Innym przykładem empirycznego prawdopodobieństwa jest tzw. prawdopodobieństwo dożycia jako przedmiot ubezpieczenia pieniężnego; jeżeli x dożył k-tego roku życia, to x dożyje prawdopodobnie w stopniu p $(k + n)$-tego roku życia. Stopień prawdopodobieństwa

oblicza się w tym przypadku na podstawie statystycznych tablic śmiertelności. Frawdopodobieństwo może też być obliczane z góry na podstawie pewnych założeń; obliczamy np., że stopień prawdopodobieństwa wyciągnięcia asa z talii 52 kart wynosi $^1/_{13}$, ponieważ przypuszczać można, że przy liczbie ciągnięć wzrastającej nieograniczenie będą się one rozkładać jednakowo na wszystkie karty talii. Tak obliczone prawdopodobieństwo nazywa się prawdopodobieństwem apriorycznym.

Prawdopodobieństwo pojęte jak wyżej bywa nazywane czasem prawdopodobieństwem względnym, w przeciwstawieniu do rozważanego w matematycznej teorii prawdopodobieństwa tzw. prawdopodobieństwa bezwzględnego, tzn. prawdopodobieństwa, iż fx, czyli iż zajdzie pewne wydarzenie, np., iż rzut kostką da liczbę 6, bez uwzględnienia jakichkolwiek warunków. Stopień prawdopodobieństwa bezwzględnego oblicza się biorąc stosunek liczby przypadków sprzyjających, tzn. przypadków, w których fx (rzut kostką da liczbę 6) do liczby przypadków możliwych, tzn. liczby przypadków w zakresie zmienności x, w których bądź fx, bądź nieprawda, że fx (rzut kostką da którąkolwiek z liczb 1—6). Jednak nic nie dzieje się w ten sposób, by nie było zależne od czegokolwiek innego, i prawdopodobieństwo zdarzenia może być rozmaite, w zależności od zrealizowania takich lub innych warunków jego wystąpienia. Dlatego też do obliczenia stopnia prawdopodobieństwa jakiegokolwiek zdarzenia jest niezbędne odniesienie go do warunków, w których ono występuje. Także prawdopodobieństwo bezwzględne trzeba też w ten sposób rozumieć jako prawdopodobieństwo wydarzenia odniesione do warunków znanych lub rozumiejących się same przez się, które panują w całym zakresie owych przypadków możliwych (w danym przykładzie do przypadków wykonania rzutu w jednakowy sposób).

Analogicznie należy też interpretować wszelkie zdania, w których mowa o prawdopodobieństwie zdarzeń indywidualnych. Np. mówi się, że pewna teoria naukowa jest bardziej prawdopodobna od drugiej albo że jest mało prawdopodobne, by pacjent przetrzymał chorobę. Podstawą tego rodzaju wypowiedzi jest zaliczenie przedmiotu, o którym mowa, do pewnej klasy przez wzięcie pod uwagę cech dlań charakterystycznych; tak zaliczamy jedną i drugą teorię naukową do pewnego typu i szacujemy częstość teorii prawdziwych w danym typie (częstość ta najczęściej bywa określona jedynie bardzo ogólnikowo); w drugim przykładzie ujmujemy statystycznie stosunek liczby przypadków śmiertelnych przy zachorowaniach pewnego typu do liczby zachorowań tego typu itp. Prawdopodobieństwo określamy według owych częstości, stosownie do poprzednio wyłożonych zasad.

Niekiedy prawdopodobieństwo przyjmuje postać związku między funkcjami propozycjonalnymi dwóch różnych zmiennych: $C_p fxgy$. Dzieje się to, gdy mamy

do czynienia z dwoma różnymi szeregami zdarzeń i jeden z nich podporządkowany jest funkcji fx, drugi natomiast — funkcji gy, zarazem zaś każdemu elementowi jednego szeregu odpowiada jednoznacznie element drugiego szeregu według jakiegoś korelatora hxy. Niech np. poszukiwaną zależnością będzie związek między stanem nieba przy zachodzie słońca i stanem pogody nazajutrz, ujęty w zdaniu: „Jeżeli wieczorem słońce zachodzi za chmurą, to prawdopodobnie nazajutrz będzie słota". Szereg chmurnych zachodów słońca jest podporządkowany funkcji: dnia x słońce zachodzi za chmurą; szereg dni słotnych funkcji: dzień y jest słotny, związek hxy brzmi: „x bezpośrednio poprzedza y". Biorąc pod uwagę, że według stosunku hxy y jest identyczne z funkcją deskryptywną ${}^{c}h^{\rightarrow x}$ (521), można związek $C_p fxgy$ przekształcić podstawiając w gy tę funkcję deskryptywną, przy czym położymy „$g\,{}^{c}h^{\rightarrow x}$" = „$g_1 x$" tak, iż $C_p fxgy$ sprowadza się do postaci dawniejszej $C_p fxg_1 x$.

2. Aksjomaty jednoznaczności i miary

Teoria prawdopodobieństwa zajmuje się związkami między zdaniami ze względu na ich prawdopodobieństwo, analogicznie jak teoria zdań zajmuje się związkami między zdaniami ze względu na ich prawdziwość. Jednakże jak teoria zdań stwierdzając związki prawdziwościowe nie rozstrzyga, czy zdania w nich występujące są prawdziwe, tak teoria prawdopodobieństwa stwierdzając związki między prawdopodobieństwami nie rozstrzyga, czy prawdopodobieństwa te istnieją i jaki jest ich stopień, to bowiem zależy już od treści funkcji propozycjonalnych i jest zadaniem nauk, które mają do czynienia z owymi treściami. Teoria prawdopodobieństwa zakłada jedynie, że występujące w niej związki między prawdopodobieństwami pozwalają określić pewne prawdopodobieństwa i obliczyć ich stopień, jeżeli dane są inne prawdopodobieństwa.

Stosunek prawdopodobieństwa, który objaśniliśmy wyżej, podlega określeniu w sposób ścisły przez układ aksjomatów. Są one następujące:

612,1 $CNIpqEKC_p fxgxC_q fxgxNfx$,

co znaczy: „Jeżeli p jest różne od q, to zawsze i tylko, jeżeli jednocześnie $C_p fxgx$ i $C_q fxgx$, nieprawda, że fx". Jest to aksjomat jednoznaczności stosunku prawdopodobieństwa. Stopień prawdopodobieństwa od fx do gx posiada jednoznacznie określoną wartość, jeżeli tylko fx nie jest zawsze fałszywe. Albo inaczej: Jeżeli fx jest fałszywe, to $C_p fxgx$ jest nieokreślone, fałsz wszystko uprawdopodobnia w dowolnym stopniu, analogicznie jak fałsz wszystko implikuje. Aksjomat jednoznaczności objaśnia się liczbowo, gdy przypomnimy, że stopień prawdopodobieństwa jest ułamkiem m/n, przy czym m i n są licz-

bami całkowitymi dodatnimi i $m<n$; jeżeli ,fx' jest zawsze fałszywe, to $n = 0$, zarazem przeto $m = 0$ i $p = 0/0$ ma wartość nieokreśloną.

612,2 $CCfxgxKC_p fxgx(p = 1)$

Powyższy pierwszy aksjomat miary ustala, iż jeżeli fx implikuje gx, to stopień prawdopodobieństwa od fx do gx jest równy jedności; w każdym bowiem przypadku, w którym fx, także gx. Prawdopodobieństwo stopnia $p = 1$ nazywa się pewnością. Jeżeli fx implikuje gx, to gx jest pewne ze względu na fx. Konieczność daje pewność, lecz nie na odwrót, nie każda pewność jest koniecznością. Przypuśćmy dla przykładu, że arkusz papieru ma być pokryty bardzo drobno rozpyloną cieczą, i w tym celu działamy dostatecznie długo. Prawdopodobieństwo pokrycia każdego punktu powierzchni papieru cząsteczką cieczy jest pewnością, tzn. granica częstości funkcji: x jest pokryte cząsteczką cieczy, względem funkcji: x jest punktem powierzchni arkusza, jest jednością. Natomiast nie ma konieczności, gdyż nie można *a priori*, tzn. z koniecznością, uznać implikacji — jeżeli x jest punktem powierzchni arkusza, to x jest pokryte cząsteczką cieczy — za prawdziwą. Konieczność wymaga bezwyjątkowości, natomiast pewność zachodzi też w przypadkach, w których istnieją wyjątki, byleby tylko nie zdarzały się one począwszy od pewnej liczby n badanych zdarzeń. Tak np. nie jest konieczne, by każda liczba pierwsza była nieparzysta, lecz gdy ułożymy liczby pierwsze w szereg rosnącej wielkości, to prawdopodobieństwo, iż jakakolwiek liczba w tym szeregu jest nieparzysta, jest pewnością, stopień jego jest bowiem równy ułamkowi $(n - 1)/n = 1 - \frac{1}{n}$, którego granicą przy n wzrastającym nieograniczenie jest jedność.

Związek prawdopodobieństwa jest uogólnieniem związku implikacji formalnej, albowiem gdy przy implikacji formalnej otrzymujemy dla każdej wartości argumentu implikację materialną między odpowiednimi wartościami funkcji propozycjonalnych, związek prawdopodobieństwa daje owe implikacje materialne tylko dla niektórych wartości argumentu.

612,3 $CC_p fxgx(p \geqslant 0)$

Według aksjomatu 612,3, który jest drugim aksjomatem miary, stopień prawdopodobieństwa jest zerem lub liczbą dodatnią. Łatwo to zrozumieć, gdy pamiętamy, iż stopień prawdopodobieństwa jest ilorazem dwóch liczb dodatnich, tj. liczby m przypadków, w których gx, i liczby n przypadków, w których fx. Widoczne jest zarazem wobec warunku $m<n$, że p nie może być większe od 1, lecz to będzie udowodnione później dopiero (613,10).

Przypadek, w którym $p = 0$, nazywa się pewnością negatywną; jeżeli stopień prawdopodobieństwa od fx do gx jest zerem, to jesteśmy pewni

fałszywości *gx*. Niemożliwość, tzn. związek *CfxNgx*, pociąga za sobą pewność negatywną, podobnie jak konieczność daje pewność pozytywną, lecz nie na odwrót, tzn. pewność negatywna nie jest równoważna z niemożliwością, podobnie jak pewność pozytywna nie jest równoważna z koniecznością.

W przypadkach, w których nie ma ani pozytywnej, ani negatywnej pewności, prawdopodobieństwo $C_p fxgx$ jest możliwością *gx* ze względu na *fx* (okazać to można odwracając aksjomat 612,2 przez kontrapozycję). Lecz znów na odwrót, nie każda możliwość jest prawdopodobieństwem różnym od pozytywnej lub negatywnej pewności. Możliwość bowiem jest zdefiniowana jedynie negatywnie jako brak związku konieczności, tzn. *NCfxgx*, i niemożliwości, tzn. *NCfxNgx*, między *fx* i *gx*. Natomiast stwierdzając prawdopodobieństwo różne od pewności, stwierdzamy pozytywnie jakiś związek niekonieczny, choćby bardzo słaby, przy małym stopniu prawdopodobieństwa, przedstawiający się pod formą istnienia różnej od *0* i *1* granicy dla częstości *m/n*; tak np. w poprzednio przytoczonych przykładach jest możliwe, że jakiś punkt powierzchni arkusza nie jest pokryty kropelką cieczy, jest możliwe, że liczba pierwsza jest liczbą parzystą, jakkolwiek prawdopodobieństwo w obu tych przykładach nie jest różne od pewności. Stosunki te unaocznia następujący schemat (*K* — konieczność, *N* — niemożliwość):

K	*Możliwość*	*N*
$p = 1$	$1 > p > 0$	$p = 0$

Aksjomaty 612,2 i 612,3 nazywamy aksjomatami miary, wiążą one stosunki prawdopodobieństwa z liczbami określającymi stopnie prawdopodobieństwa. Na tej podstawie można związki między zdaniami prawdopodobieństwowymi przedstawiać jako związki liczbowe między stopniami prawdopodobieństw; przejście od związków pierwszego rodzaju do związków drugiego rodzaju jest przejściem od teorii logicznej prawdopodobieństwa do rachunku prawdopodobieństwa. To przejście zostaje umożliwione przez następującą definicję:

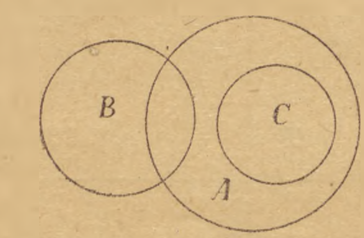
612—I „$P(fx,gx) = p$“ = „$C_p fxgx$“,

którą czytamy: „Stopień prawdopodobieństwa od *fx* do *gx* jest równy liczbie *p*“, to tyle, co „jeżeli *fx*, to prawdopodobnie w stopniu *p gx*“. Znak „=“ w *definiendum* jest znakiem równości arytmetycznej między wielkościami *P*(*fx*, *gx*) oraz *p*. Rachunek prawdopodobieństwa zna tylko równości lub nierówności między liczbami. Związki logiczne alternatywy, koniunkcji i inne między stosunkami prawdopodobieństwa, mające wpływ na stopień prawdopodobieństwa, występują w rachunku prawdopodobieństwa jedynie w argumentach funkcji *P*(*fx*,*gx*).

3. Aksjomaty dodawania i mnożenia

613,1 $CKKC_p fxgxC_q fxhxCKfxgxNhxKC_r fxAgxhx (r = p + q)$

Aksjomat dodawania 613,1 stwierdza, że jeżeli gx oraz hx wykluczają się ze względu na fx (tzn. nie może jednocześnie z fx sprawdzać się gx i hx, lecz jeżeli fx i gx, to Nhx, przez kontrapozycję zaś również, jeżeli fx i hx, to Ngx), to stopień prawdopodobieństwa od fx do alternatywy funkcji $Agxhx$ jest równy sumie stopni prawdopodobieństw od fx do każdego z członów alternatywy. Za pomocą definicji 612-1 przedstawia się związek między stopniami prawdopodobieńst w alternatywy i jej wykluczających się członów w po-staci:



Rys. 29

613,2 $P(fx, Agxhx) = P(fx, gx) + P(fx, hx)$

Do unaocznienia aksjomatu dodawania służy rys. 29, gdzie A, B, C są to odpowiednie zakresy funkcyj fx, gx, hx. Jeżeli zakresy B i C nie mają części wspólnej, to częstość względna alternatywy $Agxhx$ jest równa sumie częstości względnych gx i hx.

Aksjomat dodawania pozwala określić odejmowanie stopni prawdopodobieństw:

613,3 $CKKC_p fxgxC_r fxAgxhxCKfxgxNhxKC_q fxhx (q = r - p)$

613,4 $P(fx, hx) = P(fx, Agxhx) - P(fx, gx)$

Zgodnie z tezą 613,3 prawdopodobieństwo alternatywy dwóch funkcji wykluczających się wraz z prawdopodobieństwem jednego jej członu pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo jej drugiego członu.

Wed ug aksjomatu 612,2 wynika z prawa wyłączonego środka, któremu nadajemy tutaj postać „$CfxAgxNgx$":

613,5 $KC_r fxAgxNgx (r = 1)$

613,6 $P(fx, AgxNgx) = 1$

Stąd zaś według 613,3:

613,7 $CC_p fxgxKC_u fxNgx (u = 1 - p)$

613,8 $P(fx, gx) + P(fx, Ngx) = 1$

Jeżeli stopień prawdopodobieństwa od fx do gx jest p, to stopień prawdopodobieństwa od fx do Ngx jest $u = 1 - p$. $C_u fxNgx$ nazywa się prawdopodobieństwem uzupełniającym względem $C_p fxgx$.

Przy założeniu $p = 1$ otrzymuje się z tezy 613,7 z uwzględnieniem aksjomatu 612,2 (podstawiając nadto gx/Ngx)

613,9 $CCfxNgxKC_u fxgx(u = 0)$

Jeżeli fx wyklucza gx, to stopień prawdopodobieństwa od fx do gx jest równy 0. Z twierdzeń powyższych wynika, że nigdy stopień prawdopodobieństwa nie może być większy od jedności. Połóżmy bowiem w 613,8 $P(fx,gx) = p$ i weźmy pod uwagę, że wówczas $P(fx,Ngx) = 1 - p$, zarazem zaś $P(fx,Ngx) \geqslant 0$; wynika stąd $0 \leqslant 1 - p$ oraz $p \leqslant 1$, czyli:

613,10 $CC_p fxgx(p \leqslant 1)$

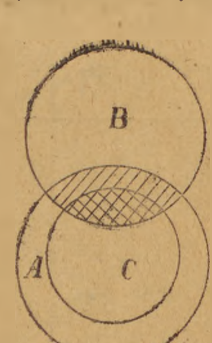
Iloczyn dwóch prawdopodobieństw od fx do gx i od fx do hx, czyli prawdopodobieństwo złożone, określa następujący aksjomat mnożenia prawdopodobieństw:

613,11 $CKC_p fxgxC_u KfxgxhxKC_w fxKgxhx(w = p \cdot u)$

Jeżeli prawdopodobieństwo od fx do gx ma stopień p, a prawdopodobieństwo od $Kfxgx$ do hx — stopień u, to prawdopodobieństwo od fx do $Kgxhx$ mą stopień $w = p \cdot u$.

Mnożenie prawdopodobieństw objaśnia rys. 30 (oznaczenia takie same, jak przy rys. 28 i 29). Częstość względna koniunkcji $Kgxhx$ jest równa częstości względnej gx pomnożonej przez częstość hx względem $Kfxgx$, czyli: stosunek części wspólnej trzech powierzchni A, B i C (dwa razy cieniowanej) do powierzchni A jest równy iloczynowi stosunku powierzchni części wspólnej A i B (raz cieniowanej) do powierzchni A przez stosunek powierzchni części wspólnej A, B i C do powierzchni części wspólnej A i B:

$$\frac{(ABC)}{A} = \frac{(AB)}{A} \cdot \frac{(ABC)}{(AB)}$$



Rys. 30

Uwzględniamy tutaj zależność hx od gx w ten sposób, że określamy prawdopodobieństwo do hx nie od fx, lecz od $Kfxgx$; zdarzyć się bowiem może, że częstość hx względem $Kfxgx$ jest inna aniżeli częstość hx względem fx, tzn. stosunek $(ABC):(AB)$ jest inny od stosunku $(AC):A$. Przeciwnie, niezależność hx od gx określamy przez definicję:

613-I „hx *jest niezależne od* gx *ze względu na* fx" = „$P(Kfxgx, hx) = P(fx,hx)$",

tzn. „stopień prawdopodobieństwa resp. częstość hx względem $Kfxgx$ jest taka sama, jak częstość hx względem fx, czyli graficznie $(ABC):(AB) = (AC):A$.

Pytamy np., jakie jest prawdopodobieństwo, że ktoś chory na dyfteryt dostanie zapalenie nerek i umrze. Aby obliczyć prawdopodobieństwo złożone zapalenia nerek i śmierci, należy określić stopień prawdopodobieństwa

od dyfterytu do zapalenia nerek, a następnie stopień prawdopodobieństwa śmierci nie tylko od zapalenia nerek lub od dyfterytu, lecz od zapalenia nerek i dyfterytu łącznie, gdyż prawdopodobieństwo śmierci przy zapaleniu nerek wzmaga się, jeżeli chory przebył uprzednio dyfteryt. Podobnie prawdopodobieństwo, że po upalnym dniu letnim nastąpi burza i zmiana pogody, rozkłada się na iloczyn prawdopodobieństwa, że po upale będzie burza, i prawdopodobieństwa, że po burzy, którą poprzedzał dzień upalny, nastąpi zmiana pogody. Prawdopodobieństwo w tym ostatnim przypadku jest mniejsze aniżeli prawdopodobieństwo, że zmiana pogody nastąpi po jakiejkolwiek burzy, gdyż zazwyczaj tzw. burze termiczne nie pociągają za sobą zmiany pogody, inaczej natomiast bywa po tzw. burzach czołowych.

Aksjomat 613,11 pozwala na sformułowanie następującego związku między stopniami prawdopodobieństw:

613,12 $\quad P(fx, Kgxhx) = P(fx, gx) \cdot P(Kfxgx, hx)$

Tenże aksjomat prowadzi do określenia ilorazu dwóch prawdopodobieństw jako odwrotności iloczynu. Istnieją tutaj dwa związki odwrotne, nie jeden, jak przy odejmowaniu, ponieważ iloczyn prawdopodobieństw jest niesymetryczny między fx, gx i hx:

613,13 $\quad CKC_{p}fxgxC_{w}fxKgxhxKC_{u}Kfxgxhx \left(u = \frac{w}{p} \right)$

613,14 $\quad CKC_{u}KfxgxhxC_{w}fxKgxhxKC_{p}fxgx \left(p = \frac{w}{u} \right)$

Tezom 613,13 i 613,14 odpowiadają następujące zależności między stopniami prawdopodobieństw:

613,15 $\quad P(Kfxgx,hx) = P(fx,Kgxhx) : P(fx,gx)$

613,16 $\quad P(fx,gx) = P(fx,Kgxhx) : P(Kfxgx,hx)$

Jeżeli hx jest niezależne od gx ze względu na fx, to aksjomat mnożenia przechodzi na szczególne prawo mnożenia

613,17 $\quad P(fx,Kgxhx) = P(fx,gx) \cdot P(fx,hx)$

Prawo to tłumaczy się graficznie (rys. 30), jak następuje: gdy $(ABC):(AB) = (AC):A$, to $\frac{(ABC)}{A} = \frac{(AB)}{A} \cdot \frac{(AC)}{A}$. Słowami: Niech powierzchnia (AB) będzie m-tą częścią powierzchni A, powierzchnia zaś (ABC) n-tą częścią powierzchni (AB), to powierzchnia (ABC) jest mn-tą częścią powierzchni A. Gdy zaś powierzchnia (AC) jest taką samą (tzn. n-tą) częścią powierzchni A, jaką częścią powierzchni (AB) jest (ABC) — to właśnie jest warunkiem niezależności — obliczymy stosunek $(ABC):A$ mnożąc $(AB):A$ przez $(AC):A$.

Przykładem szczególnego prawa mnożenia jest prawdopodobieństwo złożone, że w pewien dzień zimowy dwa pociągi przybywające z dwóch różnych

stron do miasta doznają opóźnienia. Stopień prawdopodobieństwa złożonego oblicza się w tym przypadku, mnożąc stopień prawdopodobieństwa opóźnienia się jednego pociągu przez stopień prawdopodobieństwa opóźnienia się drugiego z nich. Te dwie liczby nie będą na ogół takie same, chodzi jednak tylko o to, że oba prawdopodobieństwa są od siebie niezależne.

Inny przypadek szczególny otrzymuje się z twierdzenia 613,12, jeżeli fx jest iloczynem dwóch zdarzeń lx,mx, przy czym prawdopodobieństwo gx zależy od lx, nie zależy zaś od mx, prawdopodobieństwo natomiast hx zależy od mx, nie zależy zaś ani od lx, ani od gx, tzn. zakładamy $P(Klxmx,gx)=P(lx,gx)$, $P(KKlxmxgx,hx) = P(mx,hx)$. Wtedy 613,12 przechodzi na

613,18 $\quad P(Klxmx,Kgxhx) = P(lx,gx) \cdot P(mx,hx)$

Za przykład niech służy obliczenie prawdopodobieństwa, iż rzucając kolejno dwiema kostkami wyrzucę dwie trójki (lx — rzut pierwszą kostką, gx — wyrzucenie trójki pierwszą kostką, mx — rzut drugą kostką, hx — wyrzucenie trójki drugą kostką). Stopień prawdopodobieństwa jest iloczynem stopnia prawdopodobieństwa, iż rzucając pierwszą kostką wyrzucę trójkę, przez stopień prawdopodobieństwa, iż rzucając drugą kostką wyrzucę również trójkę.

Trzeciego rodzaju przypadek szczególny powstaje, jeśli się założy, że $P(Kfxgx,hx) = P(gx,hx)$, tzn. gdy hx nie zależy od fx ,lecz zależy jedynie od gx. Wtedy 613,12 przekształca się na

613,19 $\quad P(fx,Kgxhx) = P(fx,gx) \cdot P(gx,hx)$

Przykłady znajdujemy w powiązaniach przyczynowych. Niech np. będzie fx burzą na morzu, gx — zatonięciem statku, hx — śmiercią marynarza na tymże statku; stopień prawdopodobieństwa zatonięcia statku i śmierci marynarza ze względu na burzę jest równy iloczynowi stopni prawdopodobieństwa od burzy do zatonięcia statku i od zatonięcia statku do śmierci marynarza.

Związek 613,12 między stopniami prawdopodobieństw przy prawdopodobieństwie złożonym można przedstawić odmiennie, biorąc za punkt wyjścia przemienność koniunkcji

613,20 $\quad P(fx,Kgxhx) = P(fx,hx) \cdot P(Kfxhx,gx)$

Porównując zaś prawe strony równań 613,12 i 613,20 otrzymuje się

613,21 $\quad P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx) = P(fx,hx) \cdot P(Kfxhx,gx)$,

co można w skróceniu wysłowić jako prawidło iloczynu: Obliczając stopień prawdopodobieństwa złożonego wolno wziąć iloczyn stopni prawdopodobieństw bądź pierwszego składnika przez drugi względem pierwszego, bądź drugiego przez pierwszy względem drugiego. Niech np. $P(fx,Kgxhx)$ przedstawia prawdopodobieństwo, że pewna osoba (fx) posiada jednocześnie uzdolnienie matematyczne (gx) i muzyczne (hx). To prawdopodobieństwo rozkładamy na iloczyn prawdopodobieństwa a), że ktoś posiada uzdolnienie

matematyczne, przez prawdopodobieństwo b), że ktoś uzdolniony matematycznie posiada też uzdolnienie muzyczne, lub iloczyn prawdopodobieństwa c), że ktoś posiada uzdolnienie muzyczne, przez prawdopodobieństwo d), że ktoś uzdolniony muzycznie posiada też uzdolnienie matematyczne. Prawdopodobieństwa b) i d) nie są sobie równe, stosunek ich stopni przedstawia się według 613,21 przez proporcję

$$613{,}22 \qquad P(Kfxgx,hx):P(Kfxhx,gx) = P(fx,hx):P(fx,gx)$$

Ponieważ wiemy, że uzdolnienie muzyczne jest częstsze niż uzdolnienie matematyczne, wnioskujemy z 613,22, że częściej zdarzają się muzycy między matematykami, miż matematycy między muzykami. Zarazem wiemy też z doświadczenia, że uzdolnienie muzyczne wśród matematyków jest częstsze niż przeciętnie, tzn. $P(Kfxgx,hx) > P(fx,hx)$; wobec 613,22 winno przeto także wśród muzyków uzdolnienie matematyczne pojawiać się częściej niż przeciętnie — mianowicie 613,22 przekształca się na

$$613{,}23 \qquad P(Kfxgx,hx):P(fx,hx) = P(Kfxhx,gx):P(fx,gx)$$

Ostatnia proporcja poucza nadto, że jeżeli $P(Kfxgx,hx) = P(fx,hx)$, to zarazem $P(Kfxhx,gx) = P(fx,gx)$, tzn. jeżeli hx jest niezależne od gx ze względu na fx, to także gx jest niezależne od hx ze względu na fx.

Jeżeli gx i hx reprezentują zdarzenia połączone związkiem przyczynowym, to wielkość $P(Kfxhx,gx)$ przedstawia stopień prawdopodobieństwa, iż dany w obserwacji skutek hx posiada przyczynę gx. Związek 613,21 przechodzi przy tym założeniu na prawo prawdopodobieństwa przyczyny

$$613{,}24 \qquad P(Kfxhx,gx) = P(Kfxgx,hx) \cdot \frac{P(fx,gx)}{P(xf,hx)}$$

Słowami: Stopień prawdopodobieństwa przyczyny gx, gdy dany jest jej skutek hx, jest tym większy: a) im silniejsze jest powiązanie przyczynowe między gx i hx (im bliższe jest gx całkowitej przyczyny), b) im bardziej prawdopodobne jest gx z góry (tzn. bez względu na jego powiązanie z hx) oraz c) im mniej prawdopodobne jest hx niezależnie od gx, tzn. im mniej jest prawdopodobne, że hx ma jakąś przyczynę różną od gx.

Niech — jak w jednym z dawniejszych przykładów — fx oznacza upalny dzień letni, gx — nadejście burzy, hx — zmianę pogody; $P(Kfxhx,gx)$ jest stopniem prawdopodobieństwa, że zmianę pogody po dniu upalnym poprzedziła burza. Podobnie może lekarz zapytać, jaki jest stopień prawdopodobieństwa, że choroba umysłowa jest następstwem zakażenia luetycznego. Także urzędnik śledczy staje przed analogicznym zagadnieniem, gdy chodzi o ustalenie stopnia prawdopodobieństwa, że znalezienie zwłok pewnej osoby wskazuje na dokonanie na niej morderstwa; odpowiedź w tym ostatnim przykładzie zależy w znacznym stopniu od indywidualnych warunków życia denata fx; jeżeli bowiem te były korzystne, to $P(fx,hx)$, czyli stopień prawdopodo-

bieństwa śmierci danej osoby w ogóle, jest tylko niewiele większy od stopnia prawdopodobieństwa jej śmierci przez morderstwo *P(fx,gx)*, a że nadto *P(Kfxgx,hx)*, tzn. stopień prawdopodobieństwa, że zamach morderczy bywa śmiertelny, jest bliski pewności, to według 613,24 także *P(Kfxhx,gx)* jest tak bardzo bliskie pewności, iż w praktyce nie różni się od niej.

Aksjomat dodawania 613,1 zawierał warunek wykluczania się członów alternatywy. Istnieje przeto zagadnienie, jak oblicza się prawdopodobieństwo alternatywy, gdy jej człony nie spełniają tego warunku. Przykładem jest prawdopodobieństwo, że rzucając jednocześnie dwiema kostkami wyrzucimy przynajmniej jedną z nich parzystą liczbę oczek. Stopień prawdopodobieństwa, iż rzut kostką da parzystą liczbę oczek, jest $1/2$; gdybyśmy wprost dodali do siebie te prawdopodobieństwa dla obu kostek, otrzymalibyśmy $1/2 + 1/2 = 1$, rezultat wyraźnie fałszywy, spowodowany tym, że warunek wykluczania się nie jest tutaj zachowany; rzut parzysty mogą dać obie kostki jednocześnie. Mając przeto do czynienia z alternatywą członów nie wykluczających się, trzeba ją przekształcić na alternatywę wyłączającą i do tej następnie zastosować aksjomat dodawania. Posługujemy się w tym celu związkiem *EAgxhxAKgxhxAKgxNhxKNgxhx*, który otrzymujemy z tezy 226,16 przez podstawienie *p/gx*, *q/hx* i który pozwala niewyłączającą alternatywę *Afxgx* zamienić na wyłączającą alternatywę trójczłonową trzech koniunkcji. Do tej wolno zastosować aksjomat dodawania 613,1 i tezę 613,2:

613,25 $P(fx,Agxhx) = P(fx,AKgxhxAKgxNhxKNgxhx) = P(fx,Kgxhx) + P(fx,KgxNhx) + P(fx,KNgxhx)$

Mamy nadto:

613,26 $P(fx,gx) = P(fx,Kgxhx) + P(fx,KgxNhx)$

613,27 $P(fx,hx) = P(fx,Kgxhx) + P(fx,KNgxhx)$

Dla sprawdzenia 613,26 i 613,27 należy wziąć pod uwagę podstawienia tezy 226,15 *EgxAKgxhxKgxNhx* oraz *EhxAKgxhxKNgxhx*

Po dodaniu do siebie stronami równań 613,25, 613,26 i 613,27 oraz po uporządkowaniu otrzymanych wyrażeń otrzymuje się ogólne prawo dodawania prawdopodobieństw

613,28 $P(fx,Agxhx) = P(fx,gx) + P(fx,hx) - P(fx,Kgxhx)$

lub w postaci związku logicznego

613,29 $CKC_p fxgxC_q fxhxKC_r fxAgxhx(r = p + q - pq)$

Prawdopodobieństwo alternatywy niewyłączających się członów jest równe sumie prawdopodobieństw każdego z tych członów z osobna, pomniejszonej o prawdopodobieństwo ich koniunkcji. Prawdopodobieństwo, że rzucając jednocześnie dwiema kostkami wyrzucimy przynajmniej jedną z nich parzystą liczbę oczek, jest $1/2 + 1/2 - 1/2 \cdot 1/2 = 3/4$. Prawo powyższe jest uogól-

nieniem aksjomatu 613,1 i gdy człony alternatywy wyłączają się, przekształca się nań. Wtedy bowiem „$Kgxhx$" jest fałszywe dla wszelkich wartości x i $P(fx,Kgxhx) = 0$.

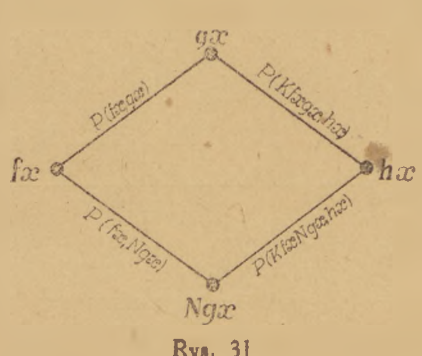
Graficzne uzmysłowienie twierdzenia 613,28 daje rys. 30. Gdy przy obliczeniu częstości alternatywy $Agxhx$ względem fx tworzymy sumę częstości względnej gx oraz częstości względnej hx, to wspólną część obu zakresów uwzględniamy dwukrotnie, dlatego należy od owej sumy odjąć jeden raz częstość względną koniunkcji obu członów.

Dla przykładu przytoczmy, że w pewnej fabryce aparatów technicznych kontrola wykazuje 2% braków z powodu wad materiału i 3% z powodu błędów montażowych. Jaki jest przeciętny procent braków w ogóle? Oba źródła braków nie wyłączają się, trzeba przeto od sumy obu częstości, która wynosi 5%, odjąć częstość braków, które wykazują oba rodzaje defektów. Ponieważ te są względem siebie, jak poucza doświadczenie, niezależne, przeto można zastosować szczególne prawo mnożenia i przyjąć częstość łącznego występowania obu defektów na $2\% \cdot 3\% = 0{,}06\%$. Przeciętna przeto braków, obliczona według wzoru 613,28, wynosi $3\% + 2\% - 0{,}06\% = 4{,}94\%$.

Niech za inny przykład służy, co następuje: Pewna firma zbywa swe wyroby częściowo przez zastępców podróżujących, którzy pozyskują klientelę, częściowo przez inseraty. Prowadzona statystyka wykazuje, że 80% zbytu dają zastępcy, 60% zbytu zawdzięcza się inseratom. Gdy przyjmiemy, że cały zbyt płynie tylko tymi dwiema drogami, tzn. $P(fx,Agxhx) = 1$, to możemy obliczyć część pozyskaną przez obie one łącznie $P(fx,Kgxhx) = 80\% + 60\% - 100\% = 40\%$, tzn. 40% klienteli zawdzięcza firma łącznemu działaniu ogłoszeń i zastępców.

4. Prawo eliminacji

Stosunki prawdopodobieństwa mogą być składane w sposób podobny do działania mnożenia względnego. Niech rys. 31 przedstawia prawdopodobieństwa od fx do gx i od $Kfxgx$ do hx, jak również od fx do Ngx i od $KfxNgx$ do hx. Prawdopodobieństwo od fx do hx daje się przedstawić za pomocą prawdopodobieństw pośrednich, nie wystarcza jednak w tym celu, jakby na pierwszy rzut oka można przypuszczać, branie jednoej gałęzi — przez gx lub przez Ngx — lecz trzeba znać wszystkie cztery prawdopodobieństwa, tj. $P(fx,gx)$, $P(Kfxgx,hx)$, $P(fx,Ngx)$ i $P(KfxNgx,hx)$, przy czym według 613,2 $P(fx,Ngx) = 1 - P(fx,gx)$. Opierając się na związku



Rys. 31

$EKAgxNgxhxhx$, który jest prostym przekształceniem tezy 226,15 mamy po kolejnym zastosowaniu praw dodawania i mnożenia prawdopodobieństw

$$P(fx,hx) = P(fx,KAgxNgxhx) = P(fx,AKgxhxKNgxhx)$$
$$= P(fx,Kgxhx) + P(fx,KNgxhx), \text{ i ostatecznie}$$

614,1 $P(fx,hx) = P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx) + P(fx,Ngx) \cdot (PKfxNgx,hx)$

jest to prawo eliminacji (sc. członu pośredniego gx) tworzące jak gdyby rozszerzenie prawa sylogizmu. Dla przykładu niech fx oznacza znów dzień upalny, gx — nadejście burzy, hx — zmianę pogody. Prawdopodobieństwo zmiany pogody po dniu upalnym można obliczyć z prawdopodobieństw pośrednich dla nadejścia i nienadejścia burzy, jeżeli zna się prawdopodobieństwo nadejścia burzy po dniu upalnym, prawdopodobieństwo zmiany pogody po burzy w czasie upałów i prawdopodobieństwo zmiany pogody po dniu upalnym, gdy nie było burzy. Graficzne umysłowienie prawa 614,1 daje rys. 30, częstość hx (zakres C) względem fx (zakres A) rozkłada się na częstość względną hx przyporządkowanych gx (zakres B) i hx przyporządkowanych Ngx.

Jeżeli założy się w przypadku szczegółowym, że $P(Kfxgx,hx) = P(gx,hx)$ oraz $P(KfxNgx,hx) = P(Ngx,hx)$, to wówczas 614,1 przechodzi na

614,2 $P(fx,hx) = P(fx,gx) \cdot P(gx,hx) + P(fx,Ngx) \cdot P(Ngx,hx)$

Prawdopodobieństwo hx względem gx, jak również względem Ngx, nie zależy od fx. Schematyczny przykład zawiera się w układzie następującym: Posiadamy trzy urny A, B, C; w urnie A mieszczą się kartki, z których pewna część oznaczona jest literą B, reszta zaś — literą C. W urnach B i C znajdują się kule białe i czarne w różnych dla obu urn stosunkach. Kartka z literą B lub C, wyciągnięta z urny A, oznacza ciągnięcie kuli z urny B lub C; prawdopodobieństwo, że wyciągnę czarną kulę, jest sumą prawdopodobieństwa, że wyciągnę kartkę z literą B, pomnożonego przez prawdopodobieństwo, iż wyciągnę czarną kulę z urny B, oraz prawdopodobieństwa, że wyciągnę kartkę z literą C, pomnożonego przez prawdopodobieństwo, że wyciągnę czarną kulę z urny C.

Jeżeli założy się w przypadku 614,2 nadto $P(Ngx,hx) = 0$, tzn. jeżeli Ngx wyklucza hx, to 614,2 przechodzi na

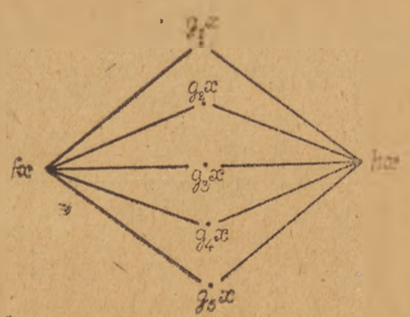
614,3 $P(fx,hx) = P(fx,gx) \cdot P(gx,hx)$

Dopiero w tej formie otrzymujemy całkowity odpowiednik zasady sylogizmu, wolno bowiem według definicji 612—I i aksjomatu 613,11 wyrażenie 614,3 przetłumaczyć na

614,4 $CKC_p fxgxC_q gxhxC_{pq} fxhx$

W myśl poprzedniego przykładu otrzymuje się ten przypadek, gdy urna C nie zawiera żadnej czarnej kuli. Innych przykładów dostarczają związki przyczynowe: fx niech oznacza dzień upalny, gx — nadejście burzy, hx — uderzenie

piorunu. Prawdopodobieństwo, że w dzień upalny padnie piorun, jest iloczynem prawdopodobieństw od upału do burzy i od burzy do piorunu. Prawo sylogizmu *CKCfxgxCgxhxCfxhx* jest szczególnym przypadkiem 614,4 przy założeniu, że $p = q = 1$. Zresztą także 614,2 przechodzi bezpośrednio w 614,3 i w prawo sylogizmu przy założeniu, że prawdopodobieństwa od *fx* do *gx* i od *gx* do *hx* są implikacjami, tzn. $P(fx,gx) = P(gx,hx) = 1$, gdyż wówczas $P(fx,Ngx) = 0$, i drugi składnik sumy odpada.



Rys. 32

Prawo eliminacji może być uogólnione, jeżeli — jak nieraz się zdarza — alternatywa *AgxNgx* daje się zastąpić przez alternatywę większej liczby wzajemnie wykluczających się a łącznie wyczerpujących członów $Ag_1xAg_2x\,A\ldots g_nx$, tak iż *hx* daje przedstawić się wpostaci $KhxAg^1xAg_2xA\ldots g_nx$. Zamiast schematu rys. 31 mamy teraz schemat inny, przedstawiony na rys. 32.

W sposób analogiczny, jak to było dla 614,1, otrzymuje się teraz związek

614,5 $$P(fx,hx)=P(fx,g_1x)P(Kfxg_1x,hx)+P(fx,g_2x)\cdot P(Kfxg_2x,hx)+ \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(fx,g_nx)\cdot P(Kfxg_nx,hx)$$

Prawo 614,5 pozwala nadać twierdzeniu 613,24 inną jeszcze postać; jeżeli mianowicie w 613,24 podstawimy za $P(fx,hx)$ jego wartość według 614,5, to otrzymamy dla każdej z możliwych i wzajemnie wyłączających się przyczyn zdarzenia *hx*:

614,6
$$P(Kfxhx,g_kx) = \frac{P(fx,g_kx)\cdot P(Kfxg_kx,hx)}{P(fx,g_1x)\cdot P(Kfxg_1x,hx) + \cdots\cdots + P(fx,g_nx)\cdot P(Kfxg_nx_1h^x)}$$

Twierdzenie 614,6 nazywa się **prawem Bayes'a**. Wskazuje ono prawdopodobieństwo od zdarzenia *hx* występującego w określonych okolicznościach *fx* do którejkolwiek z jego możliwych i wzajemnie wyłączających się przyczyn. Oto przykład liczbowy zastosowania prawa Bayes'a: W pewnej fabryce (niech „*fx*" znaczy „*x* pochodzi z danej fabryki") trzy maszyny służą do wytwarzania określonego produktu. Pierwsza daje 10 000 sztuk dziennie, druga 20 000 sztuk dziennie, trzecia 30 000 sztuk dziennie — niech „g_1x" znaczy „*x* pochodzi z pierwszej maszyny" i podobnie „g_2x" i „g_3x". Każda z maszyn daje pewną liczbę braków; niech „*hx*" znaczy „*x* jest brakiem", a mianowicie pierwsza odrzuca przeciętnie 4% braków, druga 2%, trzecia 4%. Wybieramy

prawo prawdopodob. przyczyn 613,24 $P(Kfxhx,gx) = P(Kfxgx,hx)\cdot\frac{P(fx,gx)}{P(fx,hx)}$

pewną sztukę wybrakowaną i pytamy, jakie jest prawdopodobieństwo jej pochodzenia z pierwszej, drugiej lub trzeciej maszyny. Obliczamy:

$$P(fx,g_1x) = \frac{10{,}000}{60{,}000} = \frac{1}{6} \qquad P(fx,g_2x) = \frac{20{,}000}{60{,}000} = \frac{1}{3}$$

$$P(fx,g_3x) = \frac{30{,}000}{60{,}000} = \frac{1}{2} \qquad P(Kfxg_1x,hx) = 4\% = 4/100$$

$$P(Kfxg_2x,hx) = 2\% = 2/100 \qquad P(Kfxg_3x,hx) = 4\% = 4/100$$

$$P(Kfxhx,\, g_1x) = \frac{1/6 \,.\, 4/100}{1/6.4/100 + 1/3.2/100 + 1/2.4/100} = 1/5 = 20\%$$

$$P(Kfxhx,g_2x) = \frac{1/3 \,.\, 2/100}{1/6 \,.\, 4/100 + 1/3 \,.\, 2/100 + 1/2 \,.\, 4/100} = 1/5 = 20\%$$

$$P(Kfxhx,g_3x) = \frac{1/2 \,.\, 4/100}{1/6 \,.\, 4/100 + 1/3 \,.\, 2/100 + 1/2 \,.\, 4/100} = 3/5 = 60\%$$

Prawdopodobieństwa, że brak pochodzi z pierwszej i że pochodzi z drugiej maszyny, są równe; wprawdzie bowiem druga ma produkcję dwa razy większą, ale też daje dwukrotnie mniej braków. Prawdopodobieństwo zaś dla trzeciej maszyny, dającej połowę całkowitej produkcji, jest większe niż 1/2, ponieważ wśród maszyn pozostałych jest jedna pracująca dokładniej.

Ogólne prawo dodawania (613,28) jest punktem wyjścia do określenia — za pomocą prawa eliminacji — stopnia prawdopodobieństwa implikacji, gdy są dane prawdopodobieństwa jej członów. Wobec równoważności między Cpq i $ANpq$ (223,18, 223,19) jest:

$$P(fx,Cgxhx) = P(fx,ANgxhx) = P(fx,Ngx) + P(fx,hx) - P(fx,KNgxhx) \quad (a)$$

$$P(fx,KNgxhx) = P(fx,Ngx) \,.\, P(KfxNgx,hx)$$

Wyraz $P(KfxNgx,hx)$ obliczamy z prawa eliminacji 614,1:

$$P(KfxNgx,hx) = \frac{P(fx,hx) - P(fx,gx) \,.\, P(Kfxgx,hx)}{P(fx,Ngx)},$$

skąd ostatecznie, powracając do (a) i zastępując $P(fx,Ngx)$ jego wartością z 613,8:

$$P(fx,Cgxhx) = P(fx,Ngx) + P(fx,hx) - P(fx,Ngx) \,.\, \frac{P(fx,hx) - P(fx,gx) \, P(Kfxgx,hx)}{P(fx,Ngx)}$$

$$= 1 - P(fx,gx) + P(fx,gx) \,.\, P(Kfxgx,hx)$$

$$= 1 - P(fx,gx) + P(fx,Kgxhx)$$

614,7 $\quad P(fx,Cgxhx) = 1 - P(fx,gx) + P(fx,Kgxhx)$

lub w postaci związku logicznego

614,8 $\quad CKC_p fxgxC_u KfxgxhxKC_r fxCgxhx (r = 1 - p + pu)$

$(1 - p)$ to stopień prawdopodobieństwa dla Ngx, pu stopień prawdopodobieństwa dla $Kgxhx$, zatem stopień prawdopodobieństwa implikacji $Cgxhx$ jest równy stopniowi prawdopodobieństwa dla alternatywy $ANgxKgxhx$.

W podobny sposób oblicza się stopień prawdopodobieństwa równoważności z prawdopodobieństwa jej członów, biorąc pod uwagę związek *EEgxhxAKgxhxKNgxNhx* (postawienie tezy 226,17):

$$P(fx,Egxhx) = P(fx,AKgxhxKNgxNhx)$$
$$= P(fx,Kgxhx) + P(fx,KNgxNhx) \text{ (według 613,2)}$$
$$= P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx) + P(fx,Ngx) \cdot P(KfxNgx,Nhx) \text{ (według 613,12)}$$

$$P(KfxNgx,Nhx) = \frac{P(fx,Nhx) - P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,Nhx)}{P(fx,Ngx)} \text{ (według 614,1)}$$

$$P(fx,Egxhx) =$$
$$= P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx) + P(fx,Ngx) \cdot \frac{P(fx,Nhx) - P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,Nhx)}{P(fx,Ngx)}$$
$$= P(fx,gx) \, P(Kfxgx,hx) + 1 - P(fx,hx) - P(fx,gx) \cdot (1 - P(Kfxgx,hx))$$
$$= 1 - P(fx,gx) - P(fx,hx) + 2P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx)$$

614,9 $P(fx,Egxhx) = 1 - P(fx,gx) - P(fx,hx) + 2P(fx,gx) \cdot P(Kfxgx,hx)$,

co można jeszcze według 613,12 oraz 613,28 przekształcić na

614,10 $P(fx,Egxhx) = 1 + P(fx,Kgxhx) - P(fx,Agxhx)$

Rozdział 2. Wnioskowanie prawdopodobieństwowe

1. Wyjaśnianie

Twierdzenia teorii prawdopodobieństwa są zasadami wniosków, w których z prawdopodobieństwa przesłanek otrzymujemy prawdopodobieństwo konkluzji. Wnioski te nazywamy **wnioskami prawdopodobieństwowymi**. Można by ulegając błędnej analogii przypuszczać, że jak z prawdziwości poprzednika implikacji wnioskujemy przez oderwanie o prawdziwości następnika, tak z prawdopodobieństwa poprzednika w związku prawdopodobieństwa można wnioskować o prawdopodobieństwie jego następnika. Jednakowoż byłoby to niedopuszczalne. Związek prawdopodobieństwa określiliśmy wprawdzie w ten sposób, iż jest on w pewnym sensie uogólnieniem implikacji, jednakże nie można oprzeć na nim dyrektywy odrywania prawdopodobieństwowego, która miałaby być czymś analogicznym do zwykłej dyrektywy odrywania, albowiem stopień prawdopodobieństwa następnika związku prawdopodobieństwowego jest określony jedynie ze względu na poprzednik, nie może być przeto odeń oderwany i stwierdzony niezależnie od niego. Twierdzenia teorii prawdopodobieństwa mają bądź postać implikacji między prawdopodobieństwami (jak np. twierdzenia 613,1 i 613,11), bądź postać związków liczbowych między stopniami prawdopodobieństw (np. 613,17, 613,23, 613,28.

613,1 $CKKC_p fxgx C_q fxhx CKfxgxNhx KC_r fxAgxhx$ $(r = p+q)$ ubij. dodaw.

613,11 $CKC_p fxgx C_w Kfxgxhx KC_u fxKgxhx$ $(u = pw)$

614,6 in.); te drugie mogą być jednak za pomocą definicji 612-I sprowadzone do postaci implikacyjnej, tak iż opierając się na twierdzeniach logiki prawdopodobieństwa jako na zasadach rozumowania możemy zawsze dojść do konkluzji, podobnie jak przy wnioskowaniu opartym na zasadach rozumowania zaczerpniętych z teorii dedukcji przez stosowanie dyrektyw podstawiania i odrywania. Ze względu na tę wspólność dyrektyw nazywamy rozumowanie, o którym tutaj mowa, również wnioskowaniem. Przykłady wniosków prawdopodobieństwowych poznaliśmy przy sposobności objaśniania poszczególnych twierdzeń logiki prawdopodobieństwa (por. 613,24, 613,28, 614,1, 614,2, 614,4, 614,6).

Prawdopodobieństwo jest stosunkiem między funkcjami propozycjonalnymi. Gdy mówimy o prawdopodobieństwie konkluzji wynikającej według jakiegoś twierdzenia teorii prawdopodobieństwa z prawdopodobieństwa przesłanek, to w konkluzji tej stwierdza się stopień prawdopodobieństwa pewnej funkcji propozycjonalnej $g\hat{x}$ jako następnika stosunku prawdopodobieństwa ze względu na inną funkcję propozycjonalną $f\hat{x}$ jako poprzednika tego stosunku. Mówiąc zaś w konkluzji wniosku prawdopodobieństwowego o prawdopodobieństwie zdania określonego, traktujemy to zdanie jako specjalizację funkcji propozycjonalnej $g\hat{x}$ (por. 611); przez jego stopień prawdopodobieństwa m/n rozumiemy częstość prawdziwych specjalizacji funkcji $g\hat{x}$ w zakresie prawdziwych specjalizacji funkcji $f\hat{x}$: stopień prawdopodobieństwa zdania ga ze względu na $f\hat{x}$ jest równy m/n, to tyle, co: ga jest jednym z m zdań prawdziwych uzyskanych jako specjalizacja funkcji $g\hat{x}$ w pewnym zakresie zmienności zmiennej x wśród n zdań prawdziwych uzyskanych jako specjalizacje funkcji $f\hat{x}$ w tym samym zakresie.

Ważną zwłaszcza w metodologii nauk empirycznych odmianą rozumowania operującego prawdopodobieństwem jest wyjaśnianie lub tłumaczenie. Zakładamy w nim, że zdanie (lub grupa zdań) hx, przyjęte za przesłankę, jest implikowane przez zdanie gx; w wyniku rozumowania dążymy do określenia stopnia prawdopodobieństwa zdania gx. Z prawdziwości następnika implikacji nie można wprawdzie wnosić o prawdziwości jej poprzednika; jednakże prawdziwość następnika pozwala na uznanie według prawa prawdopodobieństwa przyczyny (613,24) pewnego stopnia prawdopodobieństwa poprzednika. Niech będzie $P(fx,hx)$ stopniem prawdopodobieństwa zdania hx ze względu na dane z góry założenia lub — jak mówi się czasem — ze względu na dotychczasową wiedzę fx; podobnie $P(fx,gx)$ dla zdania gx; nazywamy oba te prawdopodobieństwa prawdopodobieństwami z góry, ponieważ są one dane jako założenia do dalszego rozumowania. Zakładamy nadto, że przy uwzględnieniu fx, gx implikuje hx, czyli $P(Kfxgx,hx) = 1$; przy tym założeniu twierdzenie 613,24 przechodzi w

621,1 $$P(Kfxhx,gx) = \frac{P(fx,gx)}{P(fx,hx)}$$

lub w postaci związku logicznego

$$621{,}1a \quad CKCKfxgxhxKC_{p}fxgxC_{q}fxhxKC_{r}Kfxhxg \left(r = \frac{p}{q}\right)$$

Dla przykładu niech będzie „fx" = „x jest człowiekiem", „gx" = „x jest krakowianinem", „hx" = „x jest Europejczykiem". Stopień prawdopodobieństwa od „x jest człowiekiem i Europejczykiem" do „x jest krakowianinem" jest równy ilorazowi stopnia prawdopodobieństwa od „x jest człowiekiem" do „x jest krakowianinem" przez stopień prawdopodobieństwa od „x jest człowiekiem" do „x jest Europejczykiem". $P(Kfxhx,gx)$, czyli prawdopodobieństwo od następnika do poprzednika implikacji, jest określone i różne od zera, jeżeli prawdopodobieństwa z góry obu zdań, $P(fx,gx)$ i $P(fx,hx)$, są różne od zera. Jest ono tym większe, im większe jest $P(fx,gx)$, czyli prawdopodobieństwo z góry poprzednika, oraz im mniejsze jest $P(fx,hx)$, tj. prawdopodobieństwo z góry następnika. Twierdzenie 621,1 daje zasadę rozumowania dla określenia prawdopodobieństwa racji ga, gdy dane jest jej następstwo ha (a jest nazwą, którą podstawiamy za zmienną x). Tak np. spotkawszy w Bombaju człowieka N możemy z pewnym małym prawdopodobieństwem przypuścić, że N jest krakowianinem. Prawdopodobieństwo to jest większe, jeżeli z góry bardziej było prawdopodobne, że możemy spotkać krakowianina w Bombaju (np. po przybyciu wycieczki z Krakowa do tego miasta). Jest ono zaś także większe wówczas, gdy okaże się, że ów spotkany człowiek jest Polakiem, niż wówczas, gdy stwierdzimy jedynie, że to Europejczyk, bo mniej prawdopodobne z góry jest spotkanie w Bombaju Polaka niż spotkanie Europejczyka.

Odczytujemy dalej z twierdzenia 621,1:

a) Wobec tego, że $P(Kfxhx,gx) \leqslant 1$, jest również $\dfrac{P(fx,gx)}{P(fx,hx)} \leqslant 1$ oraz

$$621{,}2 \qquad P(fx,gx) \leqslant P(fx,hx)$$

Prawdopodobieństwo racji jest mniejsze lub co najwyżej równe prawdopodobieństwu następstwa (oba prawdopodobieństwa ze względu na te same założenia fx); równość zachodzi w przypadku równoważności między racją i jej następstwem. Niech np. racją będzie, że spotkany w Bombaju osobnik N jest krakowianinem, następstwem — że jest on Europejczykiem. Oczywiście mniejsze jest prawdopodobieństwo spotkania w Bombaju krakowianina niż prawdopodobieństwo spotkania Europejczyka.

Jeżeli g_1x i g_2x są dwiema racjami następstwa hx, przy czym g_1x jest nadto racją dla „g_2x", to według wymienionej właśnie zależności 621,2 $P(fx, g_1x) \leqslant P(fx,g_2x)$.

Kładąc według 621,1 $P(Kfxhx, g_1x) = \frac{P(fx, g_1x)}{P(fx, hx)}$ oraz $P(Kfx\, hx, g_2x =$ $= \frac{P(fx, g_2x)}{P(fx, hx)}$ otrzymujemy na podstawie 621,2

621,3 $\quad P\, Kfxhx, g_1x) \leqslant P(Kfxhx, g_2x)$,

co interpretujemy, jak następuje: Stopień prawdopodobieństwa racji ze względu na dane następstwo jest tym większy, im bardziej ogólna jest ta racja im ogólniejszy orzecznik w funkcji gx). Tak np. z przesłanki, że N źle wygląda, z większym stopniem prawdopodobieństwa wnioskujemy ogólnie, że N jest chory, aniżeli, że jest chory na określoną chorobę.

b) **Jeżeli** $P(fz, hx) < 1$, to

621,4 $\quad P(Kfxhx, gx) > P(fx, gx)$

Spełnione następstwo, którego prawdopodobieństwo z góry było mniejsze od pewności, powiększa prawdopodobieństwo racji.

c) Tezę 621,1 można przedstawić w postaci następującej:

621,5 $\quad \frac{P(Kfxhx, gx)}{P(fx, gx)} = \frac{1}{P(fx, hx)}$

Prawdopodobieństwo racji przy uwzględnieniu jej spełnionego następstwa pozostaje do jej prawdopodobieństwa z góry w stosunku odwrotnym, jak prawdopodobieństwo z góry tego następstwa do pewności. Im mniej przeto prawdopodobne z góry było pewne następstwo, tym bardziej wpływa ono po spełnieniu na wzrost prawdopodobieństwa racji. Jeżeli dwa następstwa h_1x i h_2x pewnej racji gx pozostają względem siebie również w takim stosunku, iż h_1x jest racją dla h_2x, to według 621,2 prawdopodobieństwo h_1x z góry jest mniejsze od takiegoż prawdopodobieństwa h_2x i — wobec tego — h_1x bardziej powiększa prawdopodobieństwo racji gx, aniżeli czyni to h_2x. Przypadek taki zachodzi, gdy h_1x jest twierdzeniem ściśle sformułowanym, przepowiadającym pewne zdarzenie z podaniem czasu i miejsca jego pojawienia się oraz dokładnym oznaczeniem szczegółów, a natomiast h_2x twierdzeniem ogólnikowym, przepowiadającym owo zdarzenie bez bliższych określeń. Jeżeli przeto racja gx pozwala na przepowiadanie następstw sformułowanych ściśle, to, te w razie spełnienia się przewidywania czynią gx bardziej prawdopodobnym aniżeli przewidywania ogólnikowe. Twierdzenia określające swój przedmiot ilościowo są na ogół bardziej ścisłe od czysto jakościowych (pierwsze szeregują — drugie klasyfikują), racje przeto, które dają konsekwencje ilościowe, są bardziej prawdopodobne niż inne. Z tego między innymi powodu wynika, że prawa fizyki ujęte matematycznie są najlepiej uzasadnione spomiędzy praw wszelkich nauk empirycznych.

d) Niech będą dwa twierdzenia g_1x oraz g_2x i przypuśćmy, że h_1x jest następstwem g_1x, h_2x zaś jest następstwem g_2x; mamy przeto

$$P(Kfxh_1x,g_1x) = \frac{P(fx,g_1x)}{P(fx,h_1x)} \text{ oraz } P(Kfxh_2x,g_2x) = \frac{P(fx,g_2x)}{P(fx,h_2x)},$$

łączne zaś prawdopodobieństwo obu racji jest $P(KKfxh_1xh_2x,Kg_1xg_2x)$; połóżmy dla skrócenia „$KKfxh_1xh_2x$" = „a" i zastosujmy prawo mnożenia prawdopodobieństw

$$P(a,Kg_1xg_2x) = P(a,g_1x) \cdot P(Kag_1x,g_2x)$$

Jeżeli zaś g_1x jest wspólną racją zarówno h_1x, jak h_2x, to prawdopodobieństwo g_1x ze względu na oba następstwa ma stopień $P(a,g_1x)$ równy pierwszemu czynnikowi prawdopodobieństwa $P(a,Kg_1xg_2x)$. Jeżeli przeto drugi czynnik tego prawdopodobieństwa $P(Kag_1x,g_2x)$ jest różny od *1*, co zachodzi zawsze, gdy g_2x nie wynika z Kag_1x, to

621,6 $\quad P(a,g_1x) > P(a,Kg_1xg_2x)$

Prawdopodobieństwo wspólnej racji różnych następstw ze względu na te następstwa jest większe aniżeli łączne prawdopodobieństwo racji odrębnych poszczególnych następstw. Innymi słowy, bardziej prawdopodobne jest jedno twierdzenie tłumaczące łącznie pewną liczbę następstw, niż zespół twierdzeń tłumaczących oddzielnie poszczególne następstwa. Postulat przyjmowania jak najmniejszej liczby hipotez (racji) dla wyjaśnienia danych następstw, sformułowany w dawnej regule *entia non sunt multiplicanda*, jest uzasadniony przeto nie tylko przez zasadę ekonomii, lecz przede wszystkim przez większe prawdopodobieństwo racji jedynej wobec koniunkcji większej ich liczby.

e) Przypuśćmy, że h_1x i h_2x są dwoma następstwami racji gx i że żadne z nich nie wynika z drugiego. Mamy według 621,1

$$P(Kfxh_1x,gx) = \frac{P(fx,gx)}{P(fx,h_1x)} \qquad (a)$$

uwzględniając następnie h_2x otrzymujemy

$$P(KKfxh_1xh_2x,gx) = \frac{P(Kfxh_1x,gx)}{P(Kfxh_1x,h_2x)}, \qquad (b)$$

ponieważ h_2x nie wynika z h_1x, jest $P(Kfxh_1x,h_2x) < 1$, a więc

621,7 $\quad P(KKfxh_1xh_2x,gx) > P(Kfxh_1x,gx)$

Biorąc w ten sposób pod uwagę coraz większą liczbę następstw racji gx, niepowiązanych ze sobą stosunkami wynikania, otrzymujemy szereg nierówności: $P(fx,gx) < P(Kfxh_1x,gx) < P(KKfxh_1xh_2x,gx) < P(KKKfxh_1xh_2xh_3x,gx) < \ldots\ldots$, które wskazują, że prawdopodobieństwo racji rośnie z każdym przypadkiem spełnienia się przewidywanych na jej podstawie następstw. Aby rozstrzygnąć, do jakiej granicy wzrasta prawdopodobieństwo racji, wstawmy w równanie *(b)* wartość na $P(Kfxh_1x,gx)$ z równania *(a)* i wykonajmy mnożenie prawdopodo-

bieństw $P(fx,h_1x) \cdot P(Kfxh_1x,h_2x) = P(fx,Kh_1xh_2x)$. Wskutek tego *(b)* przyjmie postać

$$P(KKfxh_1xh_2x,gx) = \frac{P(fx,gx),}{P(fx,Kh_1xh_2x)},$$

a po zastosowaniu analogicznego przekształcenia dowolną liczbę rązy

$$P(KKK\ldots fxh_1xh_2x\ldots\ldots\ldots,gx) = \frac{P(fx,gx)}{P(fx,KK\ldots h_1xh_2x\ldots)},$$

stąd wniosek, że prawdopodobieństwo po lewej stronie równania osiągnie wartość *1*, gdy

621,8 $\quad P(fx,gx) = P(fx,KK\ldots h_1xh_2x\ldots)$

Ostatni warunek rozumieć należy w ten sposób, iż zostaje on spełniony w przypadku równoważności między racją gx i koniunkcją jej następstw $KK\ldots h_1xh_2x\ldots$. Albowiem według 621,2 prawdopodobieństwo racji jest nie większe od prawdopodobieństwa następstwa, w przypadku przeto równoważności między racją a jej następstwem zachodzi między ich stopniami prawdopodobieństwa obustronny stosunek nie-większości, czyli równość. Prawdopodobieństwo racji może się przeto zbliżać do pewności przy mnożeniu przypadków spełnienia się jej następstw i osiąga pewność w przypadku wyczerpania w ten sposób jej następstw; koniunkcja bowiem wszystkich (nierównoważnych) następstw pewnej racji jest jej równoważna. Wyczerpanie takie zachodzi w przypadku tzw. indukcji zupełnej. Stwierdzenie, iż zostały spełnione wszystkie dające przewidzieć się następstwa, wystarcza do nadania racji całkowitej pewności.

2. Indukcja

Indukcją nazywa się odmianę rozumowania wyjaśniającego, w którym między racją i jej następstwami zachodzi stosunek subalternacji (431,11), przesłankami przeto indukcji są zdania szczegółowe postaci: niektóre *A* są *B*, konkluzją zaś zdania ogólne o tych samych terminach: każde *A* jest *B*. Przesłanki są czerpane z obserwacji; obserwowane zdarzenie *x* opisujemy w zdaniach jednostkowych: *x* jest *A*, *x* jest *B* itd.; rozkłada się ono dzięki temu na składniki (cechy) *A*, *B*, *C*... Niech np. zdarzeniem będzie stan pogody w pewnym czasie i miejscu; ów stan pogody zostaje opisany w szeregu zdań określających go pod względem temperatury i wilgotności powietrza, ciśnienia barometrycznego, kierunku i siły wiatru, stopnia zachmurzenia, ilości opadu itd. Składniki te są zależne między sobą, a odnośne zależności wypowiada się w zdaniach: niektóre *A* są *B*, każde *A* jest *B* itp. Zależność wyrażoną w zdaniu: każde *A* jest *B*, można wyrazić inaczej, mówiąc, że *A* jest warunkiem wystarczającym lub przyczyną *B*, natomiast *B* jest warunkiem koniecznym lub skutkiem *A*. Dla naszych celów nie potrzeba wchodzić bliżej w strukturę stosunku przyczynowego, nie będziemy też uwzględniać momentu czasowego

w stosunku między *A* i *B*. Wystarczy wziąć pod uwagę jedynie to, co mamy na myśli, stwierdzając zdanie: każde *A* jest *B*, mianowicie, że jeżeli coś jest *A*, to jest *B*; jeżeli coś nie jest *B*, to nie jest *A*.

Celem indukcji jest odkrywanie i uzasadnianie twierdzeń o związkach wystarczającego i koniecznego uwarunkowania między składnikami zdarzeń. Spełnia przeto indukcja dwojakie zadanie, heurystyczne i uzasadniające. Indukcja przez eliminację Bacona i Milla jest indukcją heurystyczną; pozwala ona sformułować twierdzenia indukcyjne, ale nie może ich uzasadnić. Indukcja przez wyliczenie proste, nisko ceniona przez wymienionych pisarzy, jest indukcją uzasadniającą, ona jedynie dostarcza twierdzeniom uzyskanym przez indukcję eliminacyjną uzasadnienia, dzięki któremu stopień ich prawdopodobieństwa zbliża się do pewności.

Indukcja przez eliminację posługuje się dwiema podstawowymi metodami: zgodności i różnicy. Metoda zgodności służy do szukania składników zdarzenia, których dany składnik jest warunkiem wystarczającym, czyli skutków danej przyczyny; metoda różnicy służy do szukania składników, których dany składnik jest warunkiem koniecznym, czyli przyczyny danego skutku.

Przypuśćmy, że szukamy skutku danej przyczyny *A* i stosujemy w tym celu metodę zgodności. Niech będzie dany szereg obserwacji dotyczących zdarzeń, z których wszystkie zawierają składnik A, a poza tym różnią się między sobą tak, by żadne dwa nie miały wszystkich składników jednakowych;

Zdarzenie	I	*A, B, C, D, E*	
„	II	*A, nie-B, C, D, E*	
„	III	*A, B, nie-C, D, E*	
„	IV	*A, B, C, nie-D, E*	itd.

Zakładamy wychodząc od obserwacji I, iż prawdziwa jest alternatywa: „Każde *A* jest *B* lub *C*, lub *D*, lub *E*". Założenie to z kolei opiera się na dwóch dalszych: 1. że wśród składników każdego zdarzenia, w którym zawiera się składnik *A*, istnieje inny składnik *X* taki, iż każde *A* jest *X* (założenie determinizmu) oraz 2. że ów składnik *X* jest jednym ze składników *B*, *C*, *D*, *E*, wykrytych przez obserwację i wyróżnionych w opisie zdarzenia I. Obserwacje następne dostarczają zdań: „pewne *A* nie jest *B*", „pewne *A* nie jest *C*", „pewne *A* nie jest *D*", które łącznie z wyszczególnionym wyżej założeniem dają złożony sylogizm alternatywny *tollendo ponens*:

	Każde *A* jest *B* lub *C*, lub *D*, lub *E*
622,1	Pewne *A* nie jest *B*
	Pewne *A* nie jest *C*
	Pewne *A* nie jest *D*
Przeto:	Każde *A* jest *E*.

Metoda zgodności eliminuje przeto spośród składników towarzyszących składnikowi *A* w zdarzeniu, którego opis stanowi punkt wyjścia rozumowania, te, które nie są skutkami *A*. Rozumowanie, jakie zostaje przy tym zastosowane, nie jest wnioskiem prawdopodobieństwowym, lecz wnioskiem dedukcyjnym.

Metoda różnicy jest właściwą metodą heurezy dla zadania odwrotnego, tj. szukania przyczyny danego skutku. Tu punktem wyjścia jest obserwacja zdarzenia zawierającego składnik *Z*, którego przyczyny szukamy wśród innych składników tego zdarzenia. Dalsze obserwacje dobieramy tak, by nie zawierały *Z*, natomiast zawierały niektóre inne ze składników towarzyszących składnikowi *Z* w pierwszym zdarzeniu; przy tym użyteczne są tylko obserwacje zdarzeń różnych między sobą pod tym względem. Schemat obserwacyj jest przeto następujący:

Zdarzenie	I	*A, B, C, D, Z*
"	II	*A*, nie-*B*, *nie-C*, *nie-D*, *nie-Z*
"	III	*nie-A*, *B*, *nie-C*, *nie-D*, *nie-Z*
"	IV	*nie-A*, *nie-B*, *nie-C*, *D*, *nie-Z*

Zakładamy wychodząc od obserwacji I — podobnie jak przy metodzie zgodności — że jeden ze składników *A, B, C, D*, towarzyszących *Z* jest jego przyczyną, innymi słowy, zakładamy: Każde *A* lub każde *B*, lub każde *C*, lub każde *D* jest *Z*. Następne obserwacje dostarczają przesłanek: pewne *A* nie jest *Z*, pewne *B* nie jest *Z*, itd., tak iż wnioskowanie ma postać następującą:

	Każde *A* lub każde *B*, lub każde *C*, lub każde *D* jest *Z*
	Pewne *A* nie jest *Z*
622,2	Pewne *B* nie jest *Z*
	Pewne *D* nie jest *Z*
Przeto;	Każde *C* jest *Z*.

Metoda różnicy eliminuje spośród składników towarzyszących składnikowi *Z* w zdarzeniu, które jest punktem wyjścia rozumowania, te, które nie są jego przyczynami. Zastosowane przy tym rozumowanie jest sylogizmem alternatywnym *modo tollendo ponente*, nie jest przeto wnioskiem prawdopodobieństwowym, lecz wnioskiem dedukcyjnym, tak jak rozumowanie metody zgodności. Obie metody prowadzą wprawdzie do konkluzji w postaci prawa indukcyjnego, tzn. zdania ogólnego twierdzącego, lecz konkluzja ta jest jedynie zwężeniem założenia z góry przyjętego jako ogólna przesłanka alternatywna rozumowania; przesłanki szczegółowe służą do odrzucenia poszczególnych członów alternatywy.

Uzyskane w wyniku zastosowania indukcji eliminacyjnej prawo indukcyjne nie posiada większego stopnia prawdopodobieństwa aniżeli z góry przyjęta jego przesłanka alternatywna. Przesłance tej można z góry przypisać pewien stopień prawdopodobieństwa, nie ma bowiem racji do jej wykluczenia, jednakże stopień ten nie jest wysoki wobec dość wątpliwego założenia, jakie leży u jej

podstawy, że szukany skutek lub szukana przyczyna znajdują się wśród wyróżnionych przez opis składników zdarzenia będącego przedmiotem obserwacji wyjściowej. Właściwe przeto zadanie uzasadnienia wniosku indukcyjnego powstaje dopiero po jego sformułowaniu uzyskanym przez zastosowanie indukcji eliminacyjnej.

Zadanie to spełnia indukcja prosta, będąca indukcją we właściwym tego słowa znaczeniu w myśl podanego na czele określenia jako rozumowanie, w którym przesłanki postaci: niektóre *A* są *B*, służą do uzasadnienia konkluzji: każde *A* jest *B*. Niczym innym mianowicie jak indukcją prostą jest rozumowanie zwane tradycyjnie sprawdzaniem prawa indukcyjnego. W rozumowaniu tym poszukujemy empirycznych przesłanek typu „pewne *A* jest *B*“ jako następstw prawa indukcyjnego: każde *A* jest *B*, celem jego uzasadnienia. Uzasadnienie to następuje w myśl prawa 621,1, które przeto także dla indukcji prostej, jako szczególnego przypadku wyjaśniania, jest zasadą rozumowania. Celem włączenia indukcji prostej w schemat twierdzenia 621,1 trzeba wziąć pod uwagę, że każde spełnione następstwo postaci „pewne *A* jest *B*“ zwiększa prawdopodobieństwo prawa indukcyjnego postaci „każde *A* jest *B*“ jako racji przy zachowaniu warunków z 621,1 co do danych z góry stopni prawdopodobieństwa racji i następstwa.

To zwiększenie stopnia prawdopodobieństwa jest tym większe, im mniej prawdopodobne z góry było zdanie: pewne *A* jest *B*. Z dwóch zaś zdań typu „pewne *A* jest *B*“ to jest z góry (ze względu na dotychczasową wiedzę) mniej prawdopodobne, które jest bardziej różne od przypadków dotychczas obserwowanych. Jakkolwiek przeto każda nowa obserwacja typu „pewne *A* jest *B*“ zwiększa prawdopodobieństwo prawa indukcyjnego: każde *A* jest *B*, najbardziej pożądane są obserwacje dokonane w warunkach odmiennych, dotyczące zdarzeń zawierających obok *A* i *B* składniki za każdym razem inne, gdyż te obserwacje są z góry mniej prawdopodobne i bardziej zwiększają prawdopodobieństwo uzasadnianego prawa. Indukcja prosta, czerpiąc swą siłę wyłącznie z prawa 621,1, nie wymaga przyjęcia żadnych założeń podobnych do założeń, jakie czyni indukcja przez eliminację. Ani przeto nie zakłada się *a priori* zasady determinizmu w odniesieniu składników, których zależności między sobą szukamy, ani też nie trzeba przypuszczać, że znamy szczególnie dokładnie wszystkie składniki obserwowanych zdarzeń. Jeżeli tylko obserwacja dostarcza przesłanek postaci „pewne *A* jest *B*“ w dostatecznie szerokim zakresie, to wystarczają one — i one wyłącznie — do nadania prawu „każde *A* jest *B*“ dowolnie wysokiego stopnia prawdopodobieństwa.

Przyjmowaliśmy dotychczas, zgodnie z historycznym rozwojem teorii indukcji, iż prawa indukcyjne są bezwyjątkowe; wyznaczano sobie powszechnie aż do niedawnych czasów za cel badania szukanie zależności ogólnych postaci „każde *A* jest *B*“, zgodnie z arystotelesowskim postulatem ogólności wiedzy, którego wpływ nawet na nowożytnych teoretyków indukcji był wyraźny, mimo

całej ich tak opozycyjnej pozornie względem Arystotelesa postawy. Bezwyjątkowość prawa indukcyjnego „każde *A* jest *B*", interpretowana prawdopodobieństwowo, gdy nadamy mu postać implikacyjną „jeżeli *x* jest *A*, to *x* jest *B*" oznacza pewność następnika: *x* jest *B*, ze względu na poprzednik: „*x* jest *A*". Takie bezwyjątkowe zależności są jednak stosunkowo rzadkie. Najczęściej zdarza się, że nie każda obserwacja potwierdza rzekome prawo: każde *A* jest *B*, lecz obok zdarzeń, w których stwierdzamy o pewnym *A*, że jest *B*, obserwuje się inne, w których pewne *A* okazują się nie-*B*. Obserwacja sprzeczna z prawem indukcyjnym obala je w jego dotychczasowej postaci. Badacz, który ją zanotował, musi przede wszystkim rozstrzygnąć ,czy rzekome prawo nie jest tylko omyłką naukową. Jeżeli jednak poza tym okazało się ono wartościowe, to istnieją dwie drogi do wyboru.

Pierwsza utrzymuje postulat bezwyjątkowości prawa indukcyjnego kosztem bądź zacieśnienia zakresu jego podmiotu, bądź rozszerzenia zakresu jego orzeczenia. Jeżeli okazało się nieprawdą, że każde *A* jest *B*, to dążymy albo do takiego zacieśnienia zakresu *A*, aby wszelkie nie-*B* pozostały na zewnątrz niego, albo też do takiego rozszerzenia zakresu *B*, by także zaobserwowane nie-*B* znalazły się w zakresie rozszerzonym. Zakres podmiotu ogranicza się dodatkowymi określeniami w postaci czy to dodatkowych rozróżnień w jego obrębie, czy to wykluczenia tzw. okoliczności przeszkadzających; a znowu zakres orzeczenia rozszerza się uogólniając orzeczenia w ten sposób, by *B* stało się jego częścią. Schematycznym przykładem niech będzie prawo, w którym stwierdza się, że każda masa wody, jeśli do niej z zewnątrz jest doprowadzane ciepło, podwyższa swą temperaturę. Łatwo znaleźć obserwacje niezgodne z tym prawem: a) Może zdarzyć się, że woda ogrzewana słabym płomieniem w naczyniu źle chronionym od utraty ciepła, a wystawionym na działanie niskiej temperatury otoczenia, obniża swoją temperaturę. b) Obserwując pewną masę wody pod ciśnieniem atmosferycznym w temperaturze 100° C stwierdza się, że dalsze doprowadzanie ciepła nie podwyższa jej temperatury, jeżeli nie poddamy jej jednocześnie zwiększonemu ciśnieniu, lecz sprawia, że przechodzi ona w tej samej temperaturze w stan pary nasyconej. Uwzględniając obserwację a) zacieśniamy zakres podmiotu przez wyłączenie okoliczności przeszkadzającej za pomocą zastrzeżenia „każda masa wody, do której z zewnątrz jest doprowadzane ciepło i która jest dostatecznie chroniona przed jego utratą, podwyższa swą temperaturę". Aby zaś utrzymać w mocy prawo indukcyjne wbrew obserwacji b), można zacieśnić zakres podmiotu lub rozszerzyć zakres orzeczenia. W pierwszym przypadku prawo otrzymuje brzmienie: „Masa wody o temperaturze niższej niż 100° C i pod ciśnieniem atmosferycznym, do której z zewnątrz zostaje doprowadzone ciepło ... itd". W drugim przypadku natomiast powiada się: „Masa wody pod ciśnieniem atmosferycznym, do której z zewnątrz jest doprowadzane ciepło, podwyższa swą temperaturę do 100° C, a następnie przechodzi w stan pary nasyconej o tej samej

temperaturze". Wskazane sposoby najczęściej bywają stosowane w fizyce klasycznej. Prawo określające okres wahadła $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ nie sprawdza się dla wychyleń przekraczających 2^0, prawo Boyle'a - Mariotte'a, według którego iloczyn prężności i objętości odmierzonej masy gazu ściskanego w niezmiennej temperaturze jest wielkością stałą, nie sprawdza się dla znaczniejszych ciśnień itd. Dla zachowania ważności tych praw jako związków ogólnych trzeba opatrzyć je zastrzeżeniami zwężającymi zakres ich zastosowań do określonych granic; podobnie inne prawa fizyki elementarnej wymagają zastrzeżeń zwężających je do przypadków wyidealizowanych, bez tarcia, lepkości itp. We wszystkich takich przypadkach prawo sformułowane całkiem ogólnie, tj. bez owych zwężających je zastrzeżeń, nazywane bywa prawem przybliżonym. W przypadkach, w których modyfikuje się prawo przez rozszerzenie orzeczenia, pozostaje prawo pierwotne szczególnym przypadkiem prawa rozszerzonego; w tym sensie prawo Boyle'a-Mariotte'a jest szczególnym przypadkiem prawa Van der Waalsa.

Drugą drogę obiera się porzucając postulat bezwyjątkowości prawa indukcyjnego, które przekształca się wskutek tego na prawo stwierdzające już nie pewność, lecz prawdopodobieństwo następnika: *x* jest *B*, w przypadkach, w których zachodzi poprzednik: *x* jest *A*; związek bezwyjątkowy między *A* i *B* przechodzi w związek prawdopodobieństwa. Prawa tego typu noszą w praktyce naukowej nazwę uogólnień przybliżonych (Mill) lub korelacji indukcyjnych (Keynes) albo wreszcie praw statystycznych, ponieważ stopień prawdopodobieństwa *B* ze względu na *A* określa się zazwyczaj na podstawie opisu statystycznego. Metoda porzucenia postulatu bezwyjątkowości prawa indukcyjnego ma zastosowanie wówczas, gdy nie jest możliwe ujęcie okoliczności, które by pozwalały odróżnić te *A*, które są *B*, od innych, które nimi nie są. Dzieje się to, gdy składniki zdarzeń obserwowanych są bądź zbyt skomplikowane, bądź też zasadniczo nie dają się ująć. Tak np. formułuje się prawo skuteczności pewnego środka leczniczego w postaci stwierdzenia, że skutkuje ono w *n*% przypadków. Można przypuścić, że przypadki skuteczności lekarstwa różnią się od przypadków, w których pozostaje ono bezskuteczne, lecz ujęcie tej różnicy wymyka się spod obserwacji z powodu zbyt wielkiej różnorodności czynników współdziałających. Rezygnuje się przeto z ich uchwycenia biorąc pod uwagę jedynie ogół przypadków stosowania lekarstwa i stosunek liczby przypadków, w których okazało się ono skuteczne, do tego ogółu. Innym przykładem prawdopodobieństwowego ujęcia zależności jest prawo rozkładu cząsteczek w promieniach *alfa* ciał promieniotwórczych. Ze względów zasadniczych jest niemożliwe określenie położenia i pędu cząsteczki w jednej i tej samej chwili, a więc elementów określających jej drogę; dlatego też możliwe jest jedynie podanie stopnia prawdopodobieństwa, z jakim spodziewać się można pojawienia się cząsteczki w określonym miejscu.

Prawa statystyczne są często pojmowane jako prawa czysto opisowe, tzn. zdające sprawę ze stanu rzeczy jedynie w zakresie dotychczas obserwowanych przypadków. Mogą one jednak być stosowane także poza tym zakresem jako prawa ogólne, pozwalające przewidywać stopień prawdopodobieństwa przypadków nowych, a zarazem wyjaśniające prawidłowość statystyczną tych przypadków, podobnie jak to czynią prawa indukcyjne w stosunku do zależności bezwyjątkowych. Tak np., gdyśmy stwierdzili skuteczność lekarstwa w $n\%$ dotychczas obserwowanych przypadków jego stosowania, możemy przypuszczać, że jest to prawidłowość ogólna i w dalszych obserwacjach analogicznych zostanie zachowany ten sam stosunek procentowy. Zarazem możemy uważać odpowiednie prawo za rację wyjaśniającą wyniki obserwacji stwierdzających w nowych zastosowaniach ten sam stopień prawdopodobieństwa przypadków skuteczności.

3. Wnioskowanie przez analogię

Wnioskowanie przez analogię jest w pewnym sensie odpowiednikiem wnioskowania wyjaśniającego. Przy wyjaśnianiu przesłankami są następstwa, konkluzją — ich racja, tutaj wnioskujemy z niektórych następstw o innych następstwach tej samej racji.

Przypuśćmy, że h_1x i h_2x są dwoma następstwami jednej i tej samej racji gx; pragniemy określić stopień prawdopodobieństwa h_2x ze względu na h_1x przedstawiony przez wyrażenie $P(Kfxh_1x,h_2x)$, przy czym fx przedstawia założenia, które posiadamy z góry. W celu rozwiązania zagadnienia odwołujemy się do prawa mnożenia prawdopodobieństw 613,12 i prawidła iloczynu 613,21:

$$P(fx,Kh_1xh_2x) = P(fx,h_1x)\cdot P(Kfxh_1x,h_2x) = P(fx,h_2x)\cdot P(Kfxh_2x,h_1x) \qquad (a)$$

skąd
$$\frac{P(Kfxh_1x,h_2x)}{P(fx,h_2x)} = \frac{P(Kfxh_2x,h_1x)}{P(fx,h_1x)} \qquad (b)$$

Weźmy nadto pod uwagę twierdzenie 621,1: $P(Kfxh_1x,gx) = \dfrac{P(fx,gx)}{P)(fx,h_1x)}$

i wprowadźmy wartość na $P(fx,h_1x)$ w poprzednie równanie:

$$\frac{P(Kfxh_1x,h_2x)}{P(fx,h_2x)} = P(Kfxh_2x,h_1x)\cdot\frac{P(Kfxh_1x,gx)}{P(fx,gx)} \qquad (d)$$

Mamy nadto według 621,1:

$$P(Kfxh_2x,h_1x) = \frac{P(Kfxh_2x,gx)}{P(KfxKh_1xh_2x,gx)} \qquad (e)$$

Wprowadźmy wartość na $P(Kfxh_2x,h_1x)$ w równanie *(d)*

$$\frac{P(Kfxh_1x,h_2x)}{P(fx,h_2x)} = \frac{P(Kfxh_2x,gx)}{P(KfxKh_1xh_2x,gx)}\cdot\frac{P(Kfxh_1x,gx)}{P(fx,gx)} \qquad (f)$$

Według *(f)* przesłanka h_1x zwiększa prawdopodobieństwo konkluzji h_2x zawsze i tylko, jeżeli wartość wyrażenia po lewej stronie równania jest większa od *1*. Zarazem musi być większa od *1* także prawa strona równania *(f)*, otrzymujemy przeto

$$1 < \frac{P(Kfxh_2x,gx)}{P(KfxKh_1xh_2x,gx)} \cdot \frac{P(Kfxh_1x,gx)}{P(fx,gx)} \qquad (g)$$

skąd:

$$623{,}1 \qquad \frac{P(KfxKh_1xh_2x,gx)}{P(Kfxh_1x,gx)} < \frac{P(Kfxh_2x,gx)}{P(fx,gx)}$$

Nierówność 623,1 przedstawia warunek konieczny i wystarczający na to, aby przesłanka h_1x zwiększała prawdopodobieństwo konkluzji h_2x. Warunek ten da się wyrazić w następujących słowach: przesłanka h_1x zwiększa prawdopodobieństwo konkluzji h_2x zawsze i tylko, jeżeli ich wspólna racja gx ma z góry stopień prawdopodobieństwa różny od *0* oraz jeżeli przyrost prawdopodobieństwa gx ze względu na h_2x jest mniejszy przy uwzględnieniu h_1x aniżeli bez tegoż.

Stosunek $\frac{P(KfxKh_1xh_2x,gx)}{P(Kfxh_1x,gx)}$ ma wartość tym mniejszą, im mniejszy jest jego licznik oraz im większy jego mianownik. Wiadomo, że z dwóch następstw h_1x i h_2x wspólnej racji gx, z których pierwsze jest racją drugiego, pierwsze bardziej powiększa prawdopodobieństwo racji niż drugie (621 c). Mianownik jest przeto tym większy, im mniej różni się h_1x od gx, tzn. im więcej elementów wspólnych istnieje między h_1x i gx; niech np. gx będzie „x jest czerwone, krągłe, twarde, wonne i wyrasta na jabłoni", stopień prawdopodobieństwa od h_1x do gx będzie większy dla h_1x o brzmieniu „x jest czerwone, krągłe, twarde i wonne", aniżeli gdyby h_1x było „x jest czerwone i krągłe". Podobnie licznik ma wartość tym mniejszą, im Kh_1xh_2x bardziej różni się od gx, tzn. im bardziej różne jest h_2x od gx przy danym h_1x. Im mniejsza wartość stosunku $\frac{P(KfxKh_1xh_2x,gx)}{P(Kfxh_1x,gx)}$, tym bardziej wzrasta wartość stosunku $\frac{P(Kfxh_1x,h_2x)}{P(fx,h_2x)}$, tzn. tym bardziej h_1x zwiększa stopień prawdopodobieństwa h_2x. Tym bardziej przeto przesłanka h_1x zwiększa stopień prawdopodobieństwa konkluzji h_2x przy wspólnej racji gx, im h_1x jest bardziej bliskie racji gx oraz im h_2x jest od niej dalsze. Według poprzednio użytego przykładu większy jest stopień prawdopodobieństwa od h_1x do h_2x, jeżeli h_1x brzmi „x jest czerwone, krągłe, twarde, wonne", h_2x zaś „x wyrasta na jabłoni", aniżeli wówczas, gdy h_1x ma brzmienie „x jest czerwone i krągłe", natomiast h_2x „x jest twarde wonne i wyrasta na jabłoni".

Rozdział 3. Prawdopodobieństwo i logiki wielowartościowe

1. Wielowartościowość metryczna

Pojmowaliśmy dotychczas prawdopodobieństwo jako stosunek między funkcjami propozycjonalnymi uważając je za uogólnienie związku implikacyjnego. Można jednak wiązać je także z pojęciem prawdziwości i uważać za uogólnienie tego pojęcia. Dochodzi się przez to do logiki wielowartościowej w sposób inny, aniżeli poznaliśmy to poprzednio (por. 412 i 525).

Określiliśmy (611) prawdopodobieństwo $C_p fxgx$ jako granicę częstości gx względem fx, tzn. jako granicę, do której zmierza stosunek liczby m przypadków, dla których gx, do liczby n przypadków, dla których fx, przy wzrastającym n. Jeżeli przyjmiemy, że n jest wprost liczbą tych wartości argumentu x, dla których rozpatrujemy funkcję $g\hat{x}$, i że nadto dla wszystkich tych n wartości fx jest prawdziwe, to wolno prawdopodobieństwo funkcji $g\hat{x}$ uważać wprost za jej własność przysługującą jej w zbiorze n wartości zmiennej x. Niech np. gx będzie „x jest strzałem celnym" i niech liczba strzałów oddanych będzie $n = 100$, w czym celnych $m = 70$, to stosunek liczby strzałów celnych do liczby strzałów oddanych $m/n = 70\%$ przedstawia prawdopodobieństwo funkcji gx w zbiorze 100 wartości jej argumentu, dobranym jako zbiór oddanych strzałów. Oznaczamy zbiór wartości argumentu x, w którym rozpatrujemy prawdopodobieństwo funkcji $g\hat{x}$, symbolem „x_i". Zbiór x_i, w którym określamy prawdopodobieństwo funkcji $g\hat{x}$, niech nazywa się **fundamentem** tej funkcji, odpowiadający mu zbiór (gx_i) jej wartości — „gx_i" w nawiasie — **funkcją ufundowaną** albo **układem zdaniowym** do niej należącym. Prawdopodobieństwo funkcji (gx) w tym zbiorze oznacza się symbolem „$P((gx_i))$". Równanie

631-I $\quad P((gx_i)) = p$

określa stopień prawdopodobieństwa funkcji $g\hat{x}$ w zbiorze x_i. Zależność prawdopodobieństwa funkcji $g\hat{x}$ od $f\hat{x}$ kryje się w parametrze „i" zależnym od doboru funkcji $f\hat{x}$.

Niech oznaczenie prawdopodobieństwa wzorem 631-I nosi nazwę oznaczenia **predykatywnego**, w przeciwieństwie do oznaczenia implikacyjnego wzorem $C_p fxgx$ (611-I) lub $P(fx,gx) = p$ (612-I). Elementy fundamentu xi muszą być wyjęte ze zbioru wartości argumentu funkcji $g\hat{x}$, dla których funkcja ta posiada sens, i uporządkowane jako ciąg określony, gdyż przy różnym ich uporządkowaniu granica stosunku m/n, jeżeli n wzrasta nieograniczenie, może przybierać różne wartości. Niech np. przy pewnym upo-

rządkowaniu wartości argumentu funkcja $g\hat{x}$ zamienia się kolejno na zdanie prawdziwe (v) i fałszywe (f):

$$(a) \quad v, f, v, f, v, f \ldots$$

W zbiorze tak uporządkowanym stopień jej prawdopodobieństwa $p = 1/2$, gdyż jeżeli przez n oznaczymy liczbę wyrazów szeregu (a) od początku aż do m-tego „v"w tym szeregu, to $n = 2m - 1$, czyli $m = \frac{n+1}{2}$, a stosunek $m/n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+1/n}{2}$ dla n $= \infty$ zmierza do granicy $1/2$. Ten sam zbiór wartości argumentu można jednak tak uporządkować, by kolejne wartości funkcji były:

$$(b) \quad v, f, f, v, f, f, v, f, f, v \ldots\ldots,$$

jeżeli teraz przez n i m analogicznie oznaczymy liczbę wyrazów w odcinku szeregu (b) aż do pewnego „v" i liczbę wyrazów „v" w tym odcinku, to $n = 3m - 2$ i $m = \frac{n+2}{3}$, a stosunek $m/n = \frac{n+2}{3n} = \frac{1+2/n}{3}$ dla $n = \infty$ zmierza do granicy $1/3$, która jest stopniem prawdopodobieństwa w tym przypadku.

W równaniu 631—I, jeżeli liczba n elementów zbioru $x_{\hat{i}}$ rośnie nieograniczenie, to p przyjmuje wartości wszelkich ułamków w przedziale $0 < p < 1$; jeżeli natomiast n jest skończone, to p przybiera jedną z wartości $0/n$, $1/n$, $2/n$, ... n/n, przeto dla $n = 1$ p może mieć jedną z dwóch wartości $0/1 = 0$ lub $1/1 = 1$, dla $n = 2$ p może mieć jedną z trzech wartości $0/2$, $1/2$, $2/2 = 1$ itd., zależnie od tego, dla ilu spomiędzy elementów zbioru $x_{\hat{i}}$ staje się gx zdaniem prawdziwym.

Przy przyjętych wyżej oznaczeniach powiedzenie, że $g\hat{x}$ jest funkcją propozycjonalną, której fundament składa się z jednego tylko elementu x_1, jest równoważne z powiedzeniem, że podstawiliśmy w niej za zmienną x wartość x_1, tzn. dokonaliśmy działania specjalizacji (311) tej funkcji, dzięki czemu zamieniła się ona w zdanie prawdziwe lub fałszywe. W pierwszym przypadku jej prawdopodobieństwo $P((gx_1)) = 1/1 = 1$; w drugim natomiast $P((gx_1)) = 0/1 = 0$: prawdziwość zdania otrzymanego przez specjalizację funkcji propozycjonalnej tłumaczy się prawdopodobieństwem równym 1, jego fałszywość — prawdopodobieństwem równym 0. Wyrażenia $P((gx_1)) = 1$ i $P((gx_1)) = 0$ są metalogicznymi zdaniami o zdaniu (gx_1), podobnie jak np. „$Fvv = v$" przy stosowaniu metody matrycowej.

Tak przeto włącza się prawdziwość i fałszywość w zbiór prawdopodobieństw różnych stopni. Zbiór ten obejmuje szeregi o różnej liczbie wyrazów zależnie od wartości liczby n, tzn. od liczby elementów fundamentu $x_{\hat{i}}$ funkcji propo-

zycjonalnej $g\hat{x}$, której własnością w tymże zbiorze jest prawdziwość resp. prawdopodobieństwo — prawdziwość uważamy teraz za szczególny przypadek prawdopodobieństwa albo prawdopodobieństwo za uogólnienie prawdziwości. Funkcja propozycjonalna $g\hat{x}$ w zbiorze x_i daje układ zdaniowy wartości (gx_i) składający się z n elementów. Szereg liczbowy stopni prawdopodobieństwa łącznie z wartościami skrajnymi 0 i 1 liczy $n + 1$ wyrazów. W przypadku $n = 1$, gdy (gx_i) zawiera jeden tylko element będący specjalizacją funkcji $g\hat{x}$, szereg ów ma dwa wyrazy 0 i 1, prawdziwość i fałszywość; zdanie gx_1 przyjmuje jedną z dwu wartości logicznych; teoria funkcji propozycjonalnych w obrębie fundamentów o jedynym elemencie, czyli zwykła teoria zdań, jest logiką dwuwartościową. Gdy $n = 2$, elementy zbioru ufundowanego (gx_i) przybierają wartości 0, $1/2$ i 1 (mianowicie 0, gdy gx dla żadnej wartości x_i nie staje się zdaniem prawdziwym, $1/2$ — gdy gx staje się zdaniem prawdziwym dla jednej z nich, 1 — gdy jest zdaniem prawdziwym dla obu), logika jest w tym przypadku trójwartościowa, a miejsce zdań logiki dwuwartościowej zajmują w niej zbiory ufundowane, będące układami par zdań (gx_1, gx_2). Dla $n = 3$ logika staje się czterowartościowa o wartościach 0, $1/3$, $2/3$, $3/3 = 1$, a jej elementami są trójki zdań (gx_1, gx_2, gx_3) itp. Niech np. gx brzmi „x jest liczbą parzystą" i niech fundament jej składa się z pięciu elementów $x_i = 1$ 2, 3, 4, 5. Układ zdaniowy (gx_i) składa się przeto z pięciu zdań „1 jest liczbą parzystą" „2 jest liczbą parzystą" itd., z których dwa są prawdziwe, a trzy fałszywe; prawdziwość lub prawdopodobieństwo funkcji $g\hat{x}$ w określonym jak wyżej jej fundamencie wynosi przeto $2/5$.

Wielowartościowość logiczna, o której teraz mowa, różni się istotnie zarówno od wielowartościowości modalnej, jak i od wielowartościowości szeregowej:

a) Wielowartościowość modalna jest wielowartościowością zdań opartą na ich klasyfikacji. W logice dwuwartościowej zdania rozdzielają się na dwie klasy, zdań prawdziwych i zdań fałszywych; w logice trójwartościowej — na trzy klasy — tak można tych klas rozróżnić dowolnie wiele. Klasy zdań oznaczaliśmy literami v, f, m. Niekiedy oznacza się je liczbami: 1 oznacza prawdziwość, $1/2$ — możliwość, 0 — fałszywość. Liczby te jednak nie oznaczają tutaj ani wielkości, ani porządku, jakkolwiek są dobrane według analogii z oznaczeniami teorii prawdopodobieństwa; ich sens jako liczb nie odgrywa roli i można by je dowolnie pozamieniać.

b) Wielowartościowość szeregowa jest również wielowartościowością zdań, opiera się jednak nie na klasyfikacji, lecz na uszeregowaniu zdań. Liczby oznaczające wartość logiczną zdań spełniają rolę wskaźników porządkujących,

t.j. wyznaczających zdaniom miejsce w szeregu według stopnia ich prawdziwości, można je też uważać za konwencjonalną miarę prawdziwości.

c) Wielowartościowość prawdopodobieństwowa różni się od obu poprzednich tym, że nie jest wielowartościowością zdań, lecz układów zdaniowych. Liczba elementów układu zmienia się z liczbą rozróżnionych wartości zdaniowych. Tylko w logice dwuwartościowej układ zdaniowy jako nosiciel wartości prawdy i fałszu redukuje się do jedynego zdania, w logice trójwartościowej układ zdaniowy składa się z dwóch zdań itd. Wartości logiczne są stopniami prawdopodobieństw i jako takie są identycznie oznaczone liczbami wskazującymi zarówno miarę, jak i uszeregowanie wartości logicznych: wartość logiczna o większej liczbie jest większa od wartości logicznej o mniejszej liczbie i w szeregu następuje po niej. Wielowartościowość prawdopodobieństwowa bywa dlatego nazywana wielowartościowością metryczną, w przeciwieństwie do wielowartościowości modalnej, zwanej także topologiczną przez analogię do metrycznej i topologicznej geometrii.

2. Matryce dla metrycznej logiki wielowartościowej

Wszystkie trzy typy logik wielowartościowych traktowane metodą matrycową są, jak wiemy, teoriami metalogicznymi, mogą być jednak budowane również aksjomatycznie jako systemy logiczne (412).

Funkcje prawdziwościowe dla układów zdaniowych wielowartościowej logiki prawdopodobieństwowej tworzymy przez następujące definicje:

$$„K(f\underset{i}{x})\,(g\underset{i}{x})“ = „(Kf\underset{i}{x}\,g\underset{i}{x})“$$

$$„A(f\underset{i}{x})\,(g\underset{i}{x})“ = „(Af\underset{i}{x}\,g\underset{i}{x})“$$

632-I $$„C(f\underset{i}{x})\,(g\underset{i}{x})“ = „(Cf\underset{i}{x}\,g\underset{i}{x})“$$

$$„E(f\underset{i}{x})\,(g\underset{i}{x})“ = „(Ef\underset{i}{x}\,g\underset{i}{x})“$$

$$„N(f\underset{i}{x})“ = „(Nf\underset{i}{x})“$$

W definicjach powyższych występują po lewych ich stronach funkcje argumentów $(f\underset{i}{x})$, $(g\underset{i}{x})$, tj. funkcji ufundowanych (631), natomiast wyrażenia po prawych stronach są funkcjami ufundowanymi funkcji zdaniowych. Funkcje definiowane należałoby przeto, celem zaznaczenia różnicy kategorii semantycznej między nimi i funkcjami zdaniowymi, oznaczyć odmiennymi symbolami, podobnie jak to uc y iliśmy dla funkcji, których argumentami są orzeczniki lub relacje. Dla prostoty można jednak tego nie czynić i uważać za dostateczne odróżnienie to, że argumenty są ujęte w nawiasy oznaczające funkcje ufundowane.

Definicję 632-I rozumiemy w sposób następujący:

a) Wymienione wyżej funkcje zostają zdefiniowane w obrębie logiki określonego stopnia wartości, którą wskazuje wspólny indeks „i". Argumenty funkcji $f\hat{x}$ i $g\hat{x}$ oznaczamy tą samą literą x rozumując podobnie, jak przy oznaczaniu argumentów funkcji $f\hat{x}$ i $g\hat{x}$ w związku prawdopodobieństwa (por. 611). Fundamenty obu funkcji są równoliczne, a elementy ich są przyporządkowane sobie według wskaźnika „i" w sposób wzajemnie jednoznaczny. Niech np. fx brzmi: „Rzucając po raz x-ty kostką I wyrzuciłem liczbę oczek parzystą", gx zaś niech będzie: „Rzucając po raz x-ty kostką II wyrzuciłem parzystą liczbę oczek". Niech zbiór x_i będzie serią sześciu rzutów kostką I i sześciu rzutów kostką II, tzn. $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Przyporządkowanie między rzutami obu serii uzyskujemy w ten sposób, iż łączymy w pary pierwszy rzut kostką I z pierwszym rzutem kostką II, podobnie drugi z drugim i dalsze aż do szóstego.

b) Koniunkcją obu układów zdaniowych jest układ zdaniowy, którego elementami są koniunkcje przyporządkowanych sobie według kolejnych wartości indeksu i elementów obu składowych układów zdaniowych; a zatem w przytoczonym wyżej przykładzie koniunkcja układów zdaniowych jest układem sześciu zdań postaci „rzucając kostką I po raz x_i wyrzuciłem parzystą liczbę oczek i rzucając po raz x_i kostką II wyrzuciłem parzystą liczbę oczek". Niech np. liczbę parzystą da drugi, trzeci i czwarty rzut kostką I oraz trzeci i piąty rzut kostką II; w takim razie $P((fx_i)) = 1/2$, $P((gx_i)) = 1/3$ oraz $P(K(fx_i)(gx_i)) = 1/6$. Analogicznie jest dla dalszych funkcji prawdziwościowych, we wskazany zatem sposób obliczamy $P(A(fx_i)(gx_i)) = 4/6$, $P(C(fx_i)(gx_i)) = P(AN(fx_i)(gx_i)) = 4/6$, $P(E(fx_i)(gx_i)) = 1/2$ (elementy obu układów zdaniowych są jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe w pierwszej, trzeciej i szóstej parze rzutów).

Do zdefiniowanych wyżej funkcji prawdziwościowych należy jeszcze dołączyć związek prawdopodobieństwa $C_u fxgx$ określony w obrębie danego fundamentu; jego stopień prawdopodobieństwa oznaczamy analogicznie do określeń 632—I symbolem „$P(C_u(fx_i)(gx_i))$". Omawiany związek przedstawia częstość gx względem fx w zbiorze tych wartości spomiędzy x_i, dla których fx staje się zdaniem prawdziwym. W przykładzie, którym posługiwaliśmy się ostatnio, $P(C_u(fx_i)(gx_i)) = 1/3$, ponieważ na trzy rzuty kostką I, które dały liczbę parzystą, tylko jeden jest taki rzut kostką II.

613, 12 P(fx, Kgx hx) = P(fx, gx) . P(Kfxgx, hx) u = p.w
613, 28 P(fx, Agx hx) = P(fx, gx) + P(fx, hx) - P(fx, Kgx hx) r = p + q - pw
613, 8 P(fx, gx) + P(f, Ngx) = 1 s = 1 - p
614,7 P(fx, Cgx hx) = 1 - P(fx, gx) + P(fx, Kgx hx) czyli t = 1 - p + pw
614,9 P(fx, Egx hx) = 1 - P(fx, gx) - P(fx, hx) + 2 P(fx, gx). P(Kfxgx, hx) z = 1 - p - q + 2pw

Wartości matryc obieramy w ten sposób, aby czyniły one zadość tezom rachunku prawdopodobieństwa, które wypisujemy obecnie w postaci zmodyfikowanej, mianowicie: gx/fx, hx/gx

Dla koniunkcji $P\big(K(fx_i)(gx_i)\big) = P\big((fx_i)\big) \cdot P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big)$ (por. 613,12)

Dla alternatywy $P\big(A(fx_i)(gx_i)\big) = P\big((fx_i)\big) + P\big((gx_i)\big) - P\big((fx_i)\big) \cdot P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big)$
(por. 613,28)

Dla implikacji $P\big(C(fx_i)(gx_i)\big) = 1 - P\big((fx_i)\big) + P\big((fx_i)\big) \cdot P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big)$
(por. 614,7)

Dla rownoważności
$$P\big(E(fx_i)(gx_i)\big) = 1 - P\big((fx_i)\big) - P\big((gx_i)\big) + 2P\big((fx_i)\big) \cdot P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big)$$
(por. 614,9)

Dla negacji $P\big(N(fx_i)\big) = 1 - P\big((fx_i)\big)$ (por. 613,8)

W powyższych związkach występują po prawej stronie wartości $P\big((fx_i)\big)$, $P\big((gx_i)\big)$, tj. całkowicie określone stopnie prawdopodobieństw układów zdaniowych jako argumentów funkcji prawdziwościowych, oraz wartość $P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big)$, która nie jest wyznaczona przez tamte, gdyż może być równa różnym ułamkom dla niezmienionych wartości $P\big((fx_i)\big)$ oraz $P\big((gx_i)\big)$, zależnie od rozmieszczenia zdań prawdziwych w obu układach zdaniowych, jak to łatwo sprawdzić na przykładach. Obliczyliśmy w przykładzie podanym wyżej $P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big) = 1/3$; jeżeli zaś przypuścimy, że trzeci i czwarty, nie trzeci i piąty, rzut kostką II da parzystą liczbę oczek, to przy niezmienionych wartościach $P\big((fx_i)\big)$ oraz $P\big((gx_i)\big)$ otrzymujemy $P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big) = 2/3$. Dla określenia przeto w matrycach wartości funkcji prawdziwościowych układów zdaniowych (fx_i) i (gx_i) trzeba podać nie tylko stopnie prawdopodobieństw obu układów zdaniowych $P\big((fx_i)\big) = p$ oraz $P\big((gx_i)\big) = q$, lecz także stopień prawdopodobieństwa od (fx_i) do (gx_i), czyli $P\big(C_u(fx_i)(gx_i)\big) = u$. Wartość u podlega warunkowi ograniczającemu, wynikającemu z prawa eliminacji (614,1), które po wprowadzeniu ostatnich oznaczeń ma postać

$q = p \cdot u + (1 - p) \cdot u'$, gdzie $u' = P\big(C_u N(fx_i)(gx_i)\big)$, skąd

$u' = \dfrac{q - p \cdot u}{1 - p}$, przy czym $0 \leqslant u' \leqslant 1$, a zatem

$0 \leqslant \dfrac{q - p \cdot u}{1 - p} \leqslant 1$, rozwiązując tę nierówność ze względu na u otrzymuje się

632,1 $$\frac{p+q-1}{p} < u < \frac{q}{p}$$

Według 632,1 dla $p = 1$, $u = q$; dla $p = 0$ u staje się nieoznaczone.

Zgodnie z powyższymi ustaleniami układa się następujące tablice wartości funkcji prawdziwościowych dla wielowartościowych logik prawdopodobieństwowych:

a) 632,2

Negacja:	
$P((fx_i))$	$P(N(fx_i))$
p	$1-p$

632,3

b) Koniunkcja, alternatywa, implikacja, równoważność:						
$P\left((fx_i)\right)$	$P\left((gx_i)\right)$	$P\left(C_u(fx_i)(gx_i)\right)$	$P\left(K(fx_i)(gx_i)\right)$	$P\left(A(fx_i)(gx_i)\right)$	$P\left(C(fx_i)(gx_i)\right)$	$P\left(E(fx_i)(gx_i)\right)$
p	q	u	$p \cdot u$	$p+q-pu$	$1-p+pu$	$1-p-q+2pu$

$p.u$ $p+q-pu$ $1-p+pu$

c) Wartości prawdopodobieństwa $C_u(fx_i)(gx_i)$ dla przypadków granicznych $p = 0,1$ oraz $q = 0,1$ (według nierówności 632,1)-

632,4

p	q	u
1	1	1
1	0	0
0	1	?[1])
0	0	?[2])

1. nierówność 632,1 przyjmuje postać $0 \leqslant 0 \,.\, u \leqslant 1$, a zatem jest spełniona przy dowolnej skończonej wartości u.

2. nierówność powyższa przyjmuje postać $-1 \leqslant 0 \,.\, u \leqslant 0$, u pozostaje przeto również nieoznaczone.

Szczegółową interpretację powyższych tablic otrzymujemy przechodząc do matryc dla logik wielowartościowych przy założeniu, że liczba elementów zbioru x_i jest $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ażeby obliczyć matryce logiki dwuwartościowej, dla której $n = 1$, należy za p, q wstawiać kolejno $0, 1$; w wyniku powstają dla negacji, implikacji i innych funkcji prawdziwościowych matryce logiki klasycznej. Nieoznaczoność funkcji $C_u(fx_i)(gx_i)$ nie odgrywa przy tym żadnej roli,

ponieważ w przypadkach, w których ona zachodzi, współczynnik przy *u* jest wszędzie zerem. Dla przykładu obliczmy matryce dla $K\hat{p}\hat{q}$, $A\hat{p}\hat{q}$ oraz $C\hat{p}\hat{q}$:

632,5

p	q	Kpq pu	Apq $p + q - pu$	Cpq $1 - p + pu$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
0	0	0	0	1

Klasyczna logika dwuwartościowa jest zatem szczególnym przypadkiem logiki metrycznej wielowartościowej, tzn. prawdziwości i fałszywości jej zdań dają się przyporządkować liczby *1* i *0* jako miary prawdopodobieństwa.

3. Metryczna logika trójwartościowa i logika modalna

Metryczna logika trójwartościowa daje następujące tablice:

633,1

p	q	u	Kpq	Apq	Cpq	Epq	Np
1	1	1	1	1	1	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,1	$0\,\frac{1}{2}$	$1\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\,1$,	0,1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	?	0	1	1	0	1
0	$\frac{1}{2}$	?	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
0	0	?	0	0	1	1	1

W matrycach metrycznej logiki trójwartościowej wartości funkcji prawdziwościowych dla argumentów $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ przestają być jednoznacznie określone i otrzymują po dwie wartości. Jest to skutkiem okoliczności, że wartość *u* nie jest w tym przypadku jednoznacznie wyznaczona przez *p* i *q* i dla uczynienia jej jednoznacznie wyznaczoną trzeba jeszcze dodatkowego założenia dotyczącego rozkładu wartości (gx_i) względem wartości (fx_i). Dwuznaczność funkcji prawdziwościowych tłumaczymy sobie tym, że wartości argumentów *p*, *q* i ich negacji są w tym przypadku identyczne. Jeżeli wartości

p, q interpretujemy w ten sposób, iż uważamy je za identyczne ($p = q$), to wspomniane wyżej dodatkowe założenie dla wyznaczenia u brzmi w ten sposób, że (gx_i) jest prawdziwe dla wszystkich i tylko tych samych wartości, co (fx_i) (w poprzednim przykładzie, gdy drugi, trzeci i czwarty rzut kostką I dał parzystą liczbę oczek, także drugi, trzeci i czwarty rzut kostką II dał liczbę parzystą). Wobec tego $u = 1$, $K\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $A\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $C\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1$, $E\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1$. Jeżeli natomiast uważamy p i q za wzajemne negacje, $p = Nq$ oraz $q = Np$, to zakładamy tym samym, że $N(gx)$ jest prawdziwe dla wszystkich tych i tylko tych wartości x_i, dla których (fx_i) jest prawdziwe (w służącym nam przykładzie pierwszy, piąty i szósty rzut kostką II daje liczbę parzystą oczek). Przy takim założeniu $u = 0$, $K\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0$, $A\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 1$, $C\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $E\frac{1}{2}\frac{1}{2} = 0$.

Porównanie trójwartościowej logiki metrycznej z trójwartościową logiką modalną (242) ukazuje następującą jeszcze odpowiedniość: Połóżmy w matrycach trójwartościowej logiki modalnej $v = 1$, $m = \frac{1}{2}$ $f = 0$, to okazuje się, że matryce dla logiki modalnej przy definicji „Apq" = „$CCpqq$" są identyczne z matrycami trójwartościowej logiki metrycznej przy przyjęciu, że dla $p = 1/2$ i $q = 1/2$ $u = 1$, przy definicji zaś „Apq" = „$CNpq$" z temiż matrycami, gdy dla $p = 1/2$ i $q 1/2$ $u = 0$. Tutaj również przyjęcie jednej lub drugiej definicji dla Apq jest równoważne założeniu o takim lub innym rozkładzie wartości (gx_i) względem wartości (fx_i). Według definicji „Apq" = „$CCpqq$" winniśmy założyć, że układ wartości (gx_i) pokrywa się z układem wartości (fx_i), że zatem $u = 1$, przy przeciwnym bowiem założeniu $Apq = 1$ według tablicy 632,3, natomiast $CCpqq = \frac{1}{2}$, identyczność przeto między nimi staje się fałszywa. Przeciwnie zaś przy definicji „Apq" = $CNpq$" przyjmujemy założenie, że rozkład wartości (gxi) jest przeciwny rozkładowi (fxi), że zatem $u = 0$, gdybyśmy bowiem przyjęli $u = 1$, to Apq stałoby się równe $\frac{1}{2}$, zaś $CNpq = 1$ i znów identyczność byłaby fałszywa.

Wieloznaczność funkcji prawdziwościowych, pojawiająca się w logice metrycznej trójwartościowej dla $p = \frac{1}{2}$ i $q = \frac{1}{2}$, rozszerza się jeszcze przy przejściu do logik o większej liczbie wartości i obejmuje wartości funkcji prawdziwościowych dla ułamkowych wartości argumentów p, q, przy których wartość u musi być osobno określona dla uzyskania jednoznaczności funkcji prawdziwościowych. Tylko przeto w logice dwuwartościowej są wartości funkcji prawdziwościowych wyznaczone przez same wartości argumentów p, q, rozkład zaś wartości argumentu q względem argumentu p nie odgrywa roli, bo przy wartościach argumentów 0 i 1 wyznaczony jest już przez same te wartości.

Przejście od wielowartościowej logiki metrycznej do wielowartościowej logiki modalnej da się wykonać przez rozcięcie szeregu prawdopodobieństw

na klasy, czyli powrót od ich uszeregowania do klasyfikacji modalnej (611). Konieczność w układzie zdaniowym (fx_i) definiujemy przez generalizację

$$„\overline{Nec}\ (fx_i)“ = „(x_i)\ fx_i“,$$

co czytamy „konieczne, że (fx_i)“, to tyle, co „dla każdego x należącego do zbioru x_i jest prawdą, że fx“.

Podobnie definiuje się możliwość i niemożliwość

$$„\overline{Pos}\ (fx_i)“ = „K(Ex_i)fx_i(Ex_i)Nfx_i“$$

„Możliwe, że (fx_i)“, to tyle, co „dla pewnych x należących do zbioru x_i jest prawdą, że fx i dla pewnych x należących do zbioru x_i: Nfx“.

$$„\overline{Imp}\ (fx_i)“ = „(x_i)\ Nfx_i“$$

„Niemożliwe, że (fx_i)“, to tyle, co „dla każdego x należącego do zbioru x_i: Nfx.

Dla logiki $n+1$ wartościowej o dowolnym skończonym n mamy stąd zarazem:

$$„\overline{Nec}\ (fx_i)“ = „P((fx_i)) = 1“$$

633-1 $„\overline{Pos}\ (fx_i)“ = „1 > P((fx_i)) > 0“$

$$„\overline{Imp}\ (fx_i)“ = „P((fx_i)) = 0“$$

Oznaczając podobnie jak poprzednio przez p, q, u wartości (fx_i), (gx_i) oraz stopień prawdopodobieństwa (gx_i) względem (fx_i) ustalamy najpierw matrycę dla negacji:

633,2

p	Np
$\overline{Nec}$	$\overline{Imp}$
$\overline{Pos}$	$\overline{Pos}$
$\overline{Imp}$	$\overline{Nec}$

Tablica ta jest ułożona zgodnie z tablicą 632,2 i analogicznie do tablicy logiki trójwartościowej modalnej (242,1), gdzie wartości $\overline{Nec}$ odpowiada v, a wartości $\overline{Imp}$ wartość f.

Wartości dla u obliczamy z nierówności 632,1, wstawiając za p, q wartości według definicji 633-1, wartości dla funkcyj prawdziwościowych obliczamy z wzorów tablicy 632,3:

Tablica 633,3

p	q	u	Kpq	Apq	Cpq	Epq
Nec	*Nec*	*Nec*	*Nec*	*Nec*	*Nec*	*Nec*
Nec	*Pos*	*Pos*	*Pos*	*Nec*	*Pos*	*Pos*
Nec	*Imp*	*Imp*	*Imp*	*Nec*	*Imp*	*Imp*
Pos	*Nec*	*Nec*	*Pos*	*Nec*	*Nec*	*Pos*
Pos	*Pos*	*Imp Pos Nec*	*Imp Pos Pos*	*Nec Pos Pos*	*Pos* ~~*Nec Nec*~~ Imp Imp	*Imp Pos Nec*
Pos	*Imp*	*Imp*	*Imp*	*Pos*	*Pos*	*Pos*
Imp	*Nec*	?	*Imp*	*Nec*	*Nec*	*Imp*
Imp	*Pos*	?	*Imp*	*Pos*	*Nec*	*Pos*
Imp	*Imp*	?	*Imp*	*Imp*	*Nec*	*Nec*

K – p.u
A – p+q-pu
C – 1-p+pu

Jak widzimy, powtarza się tutaj taka sama nieoznaczoność wartości funkcji prawdziwościowych dla wartości *Pos* argumentów p, q, jaką zauważyliśmy przy poprzednich matrycach; źródłem jej jest okoliczność, że wartość u nie jest wyznaczona przez wartości p i q, jeżeli te są różne od 0 i 1, lecz zależy od tego, jak p i q są rozłożone względem siebie albo jaki jest — jakby się można wyrazić — stopień sprzężenia p i q stanowiący o prawdopodobieństwie q względem p. Jeżeli p i q są możliwe, to koniunkcja, alternatywa, implikacja między nimi może być konieczna, możliwa lub niemożliwa, zależnie od przypadku, z jakim mamy do czynienia. Gdy rzucamy monetę, możliwe jest wyrzucenie orła lub reszki, alternatywa obu możliwości jest konieczna, ich koniunkcja jest niemożliwa, ich implikacja możliwa. Przy rzucie kostką wyrzucenie jedynki czy dwójki jest możliwe, ich alternatywa jest również tylko możliwa, tak jak implikacja, koniunkcja jest niemożliwa. Przy jednoczesnym rzucie dwiema kostkami koniunkcja możliwych rzutów jest możliwa, tak jak i alternatywa. Z drugiej strony także sama wartość modalna u jeszcze nie wyznacza modalności funkcji prawdziwościowych: zarówno dla rzutów monetą, jak i dla rzutów kostką $u = Imp$, gdyż wyrzucenie jednej strony monety wyklucza wyrzucenie drugiej, a wyrzucenie jednej ściany kostki wyklucza wyrzucenie którejkolwiek innej; zarazem zaś alternatywa wyrzucenia jednej z dwóch stron monety jest konieczna, alternatywa wyrzucenia jednej z dwóch stron kostki jest możliwa — pierwszą obliczamy kładąc we wzorze $p + q - pu$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $u = 0$, zatem $p + q - pu = 1$; dla drugiej $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{1}{6}$, $u = 0$, zatem $p + q - pu = \frac{1}{3}$, czyli równa się możliwości.

Ten stan rzeczy tłumaczy ową dwoistość, jaką spotykamy w logice modalnej trójwartościowej, zależnie od przyjęcia jednej lub drugiej definicji alternatywy. Wieloznaczność funkcji prawdziwościowych zjawia się w logikach wielowartościowych już począwszy od trójwartościowej. Jedynie logika dwuwartościowa jest od niej wolna. Można ją usunąć definiując funkcje prawdziwościowe ciaśniej, rozróżniając dwa rodzaje alternatywy czy koniunkcji: jeden rodzaj odpowiadający jednej z wartości występujących w matrycy, drugi odpowiadający drugiej z nich. Tak właśnie uczyniliśmy odróżniając alternatywę zdefiniowaną przez *CCpqq* od alternatywy zdefiniowanej przez *CNpq*. Odpowiednie systemy logiczne są szczególnymi przypadkami logiki określonej przez matryce 633,2 i 633,3.

Część 7

Zarys rozwoju logiki

Rozdział 1. Starożytność i średniowiecze

1. Okres przedarystotelesowski

Dzisiejszy stan logiki jest wynikiem jej historycznego rozwoju, w którym zmieniały się poglądy zarówno na jej przedmiot, jak jej zadania i metody. Wśród owych poglądów występują związki i przeciwstawienia, których sformułowanie i stwierdzenie pozwala zrozumieć aktualne dziś jeszcze podstawowe zagadnienia logiki i związane z nimi rozstrzygnięcia. Tak przeto znajomość rozwoju logiki wyjaśnia w niejednym punkcie jej stan dzisiejszy. Niezbędna zaś jest ona dla zdania sobie należycie sprawy ze stanowiska logiki wśród różnych nauk, a zwłaszcza ze związków, które ją łączą z innymi naukami filozoficznymi.

Twórcą logiki jako odrębnej nauki filozoficznej jest A r y s t o t e l e s (384—322), ale już przed nim zostały przygotowane materiały do jej zbudowania. Można rozróżnić w filozofii greckiej przed Arystotelesem trzy wyraźnie różne metody rozumowań.

Pierwszą z nich, najstarszą, wykształciła jońska filozofia przyrody. Obserwacje zaczerpnięte z pewnej dziedziny doświadczenia stały się punktem wyjścia dla uogólnień obejmujących całość bytu. Tak obserwacje biologiczne T a l e s a posłużyły mu do wygłoszenia prawa ogólnego, iż z wody wszystko powstało. Podobnego rodzaju uogólnieniem jest twierdzenie H e r a k l i t a o zmienności rzeczy. Nie inaczej uzasadnia się też podstawowy pomysł atomizmu (według legendy pomysł ten nasunął się L e u k i p p o w i na widok pyłków unoszących się w promieniach słonecznych), choć w jego opracowaniu współdziałały inne jeszcze racje. Rozumowaniem jest tu indukcja prosta, wniosek zmierza od przesłanki „pewne a jest b" do konkluzji „każde a jest b". Nazywamy tę metodę, w odróżnieniu od następnych, m e t o d ą i n d u k c j i p r o s t e j.

Drugą jest m e t o d a d e d u k c y j n a, jej twórcą jest P a r m e n i d e s. Zmierza ona do twierdzeń apodyktycznych, tzn. twierdzeń o tym, co musi być lub nie

może być; przed twierdzeniami tego rodzaju ustępują dla wyznawców tej metody twierdzenia empiryczne o tym, co jest lub nie jest. Apodyktyczność twierdzeń opiera się na oczywistości ostatecznych założeń i dedukcyjnym toku rozumowania. Założenie ostateczne Parmenidesa brzmiało mniej więcej „co jest, jest“, odpowiadało przeto ontologicznej zasadzie tożsamości; dedukcja zaś postępowała drogą niewprost, według zasady sprzeczności, odrzucając wszystko, co niezgodne z owym naczelnym założeniem. Konkluzją było ustalenie cech negatywnych bytu: jego trwania bez początku i końca, niezmienności, niepodzielności.

Platon udoskonalił i rozwinął metodę Parmenidesa. Przede wszystkim przez to, że zastosował ją ogólnie do wszelkich pojęć, nie tylko pojęcia bytu i jego własności; okazał, iż każde pojęcie posiada swoją negację, która się z nim wyklucza. Następnie zaś przez wzbogacenie odmian dedukcji, oprócz bowiem dedukcji niewprost zastosował dedukcję przez subalternację. A wreszcie przez stworzenie ogólnego pojęcia rozumowania dedukcyjnego jako metody otrzymywania twierdzeń apodyktycznych z przesłanek aksjomatycznych. Tak pojęta dedukcja objęła sobą metodę dedukcyjną w filozofii oraz metody rozumowania stosowane przez ówczesną matematykę. Rozumowanie matematyczne stało się uznawanym świadomie wzorem wszelkiej dedukcji.

Trzecią metodą rozumowania, prócz metod indukcji prostej i dedukcji, była metoda zastosowana przez Sokratesa do definiowania pojęć przez szukanie tego, co wspólne w rozmaitości — metoda dialektyczna. Metoda ta operowała przykładami, wychodziła więc od obserwacji, podobnie jak metoda indukcji prostej, jednakże inaczej niż tamta urabiała materiał empiryczny. Aby utworzyć definicję, układa Sokrates tablicę przykładów, w których rzecz definiowana występuje, i drugą, w której jej nie ma. Jest to postępowanie takie samo, jakie w 2000 lat później stosował Francis Bacon układając swe *tabulae praesentiae et absentiae* oraz John Stuart Mill formułując indukcyjne kanony zgodności i różnicy. Proces budowania definicji według metody sokratycznej rozpoczyna się od próby określenia opartej na jakimkolwiek przykładzie; określenie takie okazuje się za ciasne lub za obszerne. Jeżeli jest za ciasne, czyli obejmuje za dużo cech, trzeba definicję zgeneralizować, tzn. wyeliminować cechy zbędne; dzieje się to na podstawie tablicy obecności według metody zgodności. Jeżeli jest za obszerna, czyli obejmuje za mało cech, trzeba definicję zdeterminować, tzn. dołączyć cechy brakujące, a wyszukanie ich odbywa się za pomocą tablicy nieobecności według metody różnicy. Za ilustrację niech służy analiza przykładu podanego przez Xenofonta. Aby zdefiniować, co jest niesprawiedliwe, tworzy się dwie tablice: w pierwszej wymienia się przykłady czynów niesprawiedliwych: Wyrządza niesprawiedliwość, kto drugiego pozbawia mienia, wolności, rani, zabija; w drugiej wśród czynów sprawiedliwych znajdzie się zwalczanie wrogów ojczyzny, karanie

zbrodniarzy, ratowanie zdrowia choremu choćby drogą bolesnej operacji. Określenie niesprawiedliwości według któregokolwiek przykładu z pierwszej tablicy, np. jako pozbawienie mienia, byłoby za ciasne. Trzeba według metody zgodności odrzucić wszystko, czym poszczególne przykłady różnią się między sobą, a uwzględnić tylko ich cechy wspólne. Dojdzie się tak do definicji brzmiącej mniej więcej: Niesprawiedliwością jest wyrządzanie zła, to właśnie jest wspólne w przytoczonych przykładach. Jednak ta definicja jest za obszerna, bo podpadają pod nią także wyszczególnione wyżej przykłady z tablicy czynów sprawiedliwych, z których pierwszy i drugi różnią się od przykładów czynów niesprawiedliwych tym, że zło jest wyrządzane wrogowi, trzeci tym, że zło jest wyrządzane w celu pomocy. Metoda różnicy wskazuje tutaj, że owe właśnie cechy usprawiedliwiają wyrządzanie zła. Aby zacieśnić poprzednią za obszerną definicję, trzeba przeto uzupełnić ją zastrzeżeniami wyłączającymi okoliczności usprawiedliwiające i ostatecznie definicja otrzymuje postać: Niesprawiedliwość jest to wyrządzanie zła przyjaciołom w celu przyniesienia im szkody. Sokrates wierzył (a wiarę tę podzielał później Francis Bacon), że definicje otrzymane tą drogą są definicjami rzeczy, tzn. twierdzeniami o własnościach przedmiotów oznaczanych przez definiowane nazwy. Nie zdawał sobie sprawy z zawodności indukcji niezupełnej, którą stosował, i z różnicy między twierdzeniem indukcyjnym, które uzyskiwał, a definicją, którą na nim opierał.

Platon rozwinął również metodę dialektyczną i powiązał ją z dedukcyjną. Rozróżnił postępowanie indukcyjne i definiowanie, nie rozróżnione u Sokratesa, w ten sposób, że pierwsze uznał jedynie za metodę heurystyczną — drogę dojścia — natomiast samo uchwycenie cech istotnych wchodzących w definicję jest, według niego, odrębnym aktem intelektualnej intuicji (*noesis*). Dialektyka, która u Sokratesa była metodą tworzenia pojęć przez definicję, została przez Platona wzbogacona rozważaniami dotyczącymi stosunków przeciwieństwa i podrzędności między pojęciami oraz odkryciem podziału logicznego. Znajomość stosunków między pojęciami pozwoliła Platonowi zarazem na powiązanie dialektyki z dedukcją, dostarczając zasady dla nowej odmiany wnioskowania przez subsumowanie przypadków szczegółowych pod zasady ogólne.

Metoda dialektyczna i dedukcyjna nie była jednak u Platona przedmiotem badania, którym jest w logice, lecz tylko właśnie metodą, narzędziem dla metafizyki, dostosowanym wprost do badania rzeczywistości idealnej i jej hierarchii. Stosunki podrzędności i nadrzędności nie były schematem klasyfikacji pojęciowej, dającym się dostosować do różnych dziedzin badania, lecz przedstawiały rzeczywistą budowę świata idej; tworzenie rodzajów i gatunków było odkrywaniem szczegółów tej budowy. Owo związanie nauki o pojęciach i o stosunkach między nimi z metafizyką musiało być przezwyciężone, aby powstała logika jako samodzielna dyscyplina.

2. Logika Arystotelesa

Oderwania logiki od metafizyki dokonał Arystoteles, uczyniwszy metodę dialektyczną i dedukcyjną przedmiotem odrębnego badania, dokonał zaś tego za pomocą wprowadzenia zmiennych na wzór zmiennych matematycznych celem oznaczenia nazw przedstawiających pojęcia. Dzięki temu mógł operować nimi w sposób ogólny i formułować schematy stosunków międzynazwowych i międzyzdaniowych, a nauka o nich stała się nauką o strukturalnych własnościach stosunków logicznych.

Oddzieliwszy logikę od metafizyki zachował Arystoteles zależność pierwszej od drugiej, polegającą na tym, że dostosował logikę dokładnie do takiego pojmowania nauki, jakie wynikało z jego poglądów metafizycznych. Według tych zaś przedmiotem nauki są pojęcia ogólne (rodzaje i gatunki) i stosunki przeciwieństwa oraz podrzędności między nimi. Wiedza o nich jest wiedzą apodyktyczną. Zgodnie z tym uczynił Arystoteles nie zdanie, lecz orzecznik — odpowiednik pojęcia — elementem logiki. Zakres zdań zacieśnił do tych, w których występują dwa orzeczniki i stosunek podrzędności (w zdaniach twierdzących) lub przeciwieństwa (w zdaniach przeczących) między nimi, a zakres form wnioskowania — do różnych postaci sylogizmu kategorycznego. Takie zacieśnienie zakresu logiki sprawiło, że rozumowanie matematyczne pozostało poza jej zakresem, wbrew wyraźnej tendencji filozofii zarówno platońskiej, jak arystotelesowskiej; wspólność bowiem między sylogizmem Arystotelesa i rozumowaniem matematycznym jest ta jedynie, że jedno i drugie jest rozumowaniem dedukcyjnym. Wspólność ta jednak może być wyraźnie uchwycona dopiero przez teorię zdań, której Arystoteles nie rozwinął; polega ona bowiem na identyczności związków międzyzdaniowych między przesłankami a konkluzją w rozumowaniach matematycznych i w arystotelesowej sylogistyce. Tu i tam te same tezy teorii zdań występują jako zasady rozumowania, najczęściej zasada sylogizmu hipotetycznego *modus ponens*. Arystoteles wspólność tę mógł ująć czysto zewnętrznie i ogólnikowo jako wspólność wiedzy apodyktycznej. Natomiast różne są zarówno elementy zdania (w logice arystotelesowej zmienne reprezentują gatunki i rodzaje, w matematyce zmienne reprezentują liczby lub utwory geometryczne), jak ich układ w zdaniu (tu przez subsumcję lub stosunki od niej pochodne, tam przez równość, nierówność, podobieństwo figur itp.), jak wreszcie rodzaj wynikania (w logice Arystotelesa z przechodniości subsumcji, w matematyce z własności stosunków matematycznych).

Mimo omawianego zacieśnienia spowodowanego zależnością od systemu metafizycznego jest logika Arystotelesa tak dojrzałą teorią, iż nie tylko panowała wraz z całością arystotelizmu do początku czasów nowożytnych, lecz ona jedna z całości tej oparła się zwycięsko przebudowie filozofii przeprowadzonej w wiekach XVII i XVIII, a głośne próby jej reformowania przedsięwzięte w owych czasach nie dały rezultatów, które by zdołały ją podważyć.

Wykład logiki Arystotelesa zawiera się w pięciu traktatach: 1. *Kategorie* (Κατηγορίαι), o kategoriach, czyli najogólniejszych orzecznikach; 2. *O wyrażeniu* (Περὶ ἑρμηνείας, *De interpretatione*), treścią tej rozprawy jest na wstępie rozróżnienie nazw i zdań, po czym następuje klasyfikacja zdań oraz analiza stosunków między nimi; 3. *Analityki*, które dzielą się na dwie części, *Analityki pierwsze* ('Αναλυτικὰ Πρότερα, *Analytica priora*), zawierające teorię sylogizmu, oraz *Analityki drugie* ('Αναλυτικὰ ῥότερα, *Analytica posteriora*), zawierające ogólne rozważania o dowodzeniu i jego ostatecznych przesłankach; 4. *Topiki* (Τοπικά od τόποι — miejsca, *loci communes* — mniej więcej tyle, co punkty wyjścia), o prowadzeniu dysput i ogólnie uznawanych zasadach stanowiących typowe punkty wyjścia (stąd „komunały") w dysputach; 5. *O dowodach sofistycznych* (Σοφιστικοὶ 'Ελεγχοι), przegląd głównych odmian sofizmatów i ich krytyka. Wyliczone rozprawy logiczne zostały przy redakcji pism Arystotelesa, której dokonał w I w. przed Chr. Andronikos z Rodos, dziesiąty po Arystotelesie scholarcha perypatetycki, zebrane w całość według podanej wyżej kolejności i opatrzone łącznym tytułem *Organon* ('Οργανον), tzn. narzędzie, co swobodniej daje się ująć słowami „o metodzie naukowej".

Porządek, w jakim zostały ułożone części *Organonu*, jest wyrazem zapatrywań natury raczej dydaktycznej niż rzeczowej, jakie panowały w szkole perypatetyckiej, i postępuje od tego, co uważano za prostsze, ku rzeczom bardziej złożonym; *Organon* nie jest jednolitą całością systematyczną, a poszczególne jego części powstały w różnych epokach działalności pisarskiej Arystotelesa. Dwie ostatnie rozprawy są chronologicznie najwcześniejsze, należą bowiem, jak się zdaje, do okresu, w którym Arystoteles był jeszcze członkiem Akademii Platońskiej. Najbardziej dojrzałą i najważniejszą częścią *Organonu* są rozprawy *O wyrażeniu* i *Analityki pierwsze*. Treścią swą obejmuje *Organon* nie tylko działy, które dziś zaliczamy do logiki, lecz także rozważania z dziedziny metafizyki, teorii wiedzy i retoryki. Arystoteles nie miał też terminu, który by łącznie obejmował całość rozważań *Organonu*. Termin „logiczny" występuje u niego tylko w formie przymiotnikowej, na oznaczenie kogoś, kto włada techniką rozprawiania i argumentowania. Tytuł rozprawy zawierającej najbardziej istotną część logiki arystotelesowej, tj. teorię sylogizmu, *Analityki* należy rozumieć w sensie podobnym, w jakim dziś używa się tego terminu mówiąc o dowodzie analitycznym lub regresyjnym, tzn. jako rozważania mające na celu znalezienie przesłanek dla danego twierdzenia drogą dokonanych na nim logicznych przekształceń.

Spośród części składowych, jakie można rozróżnić w treści rozpraw *Organonu*, najważniejsza dla późniejszego rozwoju logiki jest ta, która opracowuje rozwinięte przez Platona metody dialektyki i dedukcji, czyli to, co weszło później w skład tzw. logiki formalnej; jest to teoria wniosków z kwadratu logicznego, z odwrócenia zdań i teoria sylogizmu, dołącza się tu też teorię zdań

modalnych, tj. zdań o konieczności, możliwości i niemożliwości. Nauka o stosunkach międzynazwowych (*praedicabilia*), podziale logicznym i definicji, stanowiąca podstawę dla poprzednio wymienionych działów, jest traktowana w różnych częściach *Organonu* dość przygodnie, usystematyzowanie tych działów logiki jest dziełem późniejszych komentatorów.

Arystotelesowska logika formalna ma za punkt wyjścia rozróżnienie nazwy i zdania. Zdanie definiuje Arystoteles, w odróżnieniu od nazwy, jako wyrażenie, które jest prawdziwe lub fałszywe. Jednakże nie zachowuje on konsekwentnie tego całkiem ogólnego określenia zdania, lecz przechodzi do szeregu określeń coraz to węższych, tłumaczących się częściowo omówioną wyżej zależnością logiki Arystotelesa od jego metafizyki, częściowo wpływem rozważań językowo-gramatycznych. Pierwszym zwężeniem jest założenie przejęte od Platona (Prantl I, 72), że zdanie jest układem dwóch nazw, gdyż prawdziwość i fałszywość powstaje przez połączenie lub rozdział przedstawień (Periherm. 1), z tym bezpośrednio zaś łączy się następne zwężenie określenia w kolejnym założeniu, że formą układu jest stosunek orzekania jednej z tych nazw o drugiej; Arystoteles wypowiada stosunek ten zwrotem „*B* przysługuje lub nie przysługuje każdemu (lub nie każdemu) *A*" równoważnym powiedzeniu „każde (lub niektóre) *A* jest (lub nie jest) *B*". Trzecie wreszcie zacieśnienie jest wynikiem założenia, że orzekać w zdaniu można tylko o substancjach; wskutek tego odpadają zdania, w których podmiotem *A* byłaby nazwa negatywna (nieokreślona według Arystotelesa, np. nie-człowiek) lub pusta — te bowiem nie są nazwami substancji. Odmiany zdań wyłączone przez wymienione ograniczenia są Arystotelesowi znane i są nieraz przedmiotem rozważań; jeżeli przeto wyłącza on je z systemu logiki formalnej, trzeba to przypisać jego zasadniczemu stanowisku filozoficznemu, odmawiającemu im doniosłości naukowej.

Zależności międzyzdaniowe buduje Arystoteles jako funkcje zależności międzynazwowych wśród elementów zdań. Wskutek tego jego teoria zależności międzyzdaniowych jest znów zbyt ciasna. Funkcję zdaniową alternatywy zna tylko w postaci podprzeciwieństwa, negację tylko w postaci sprzeczności między zdaniami kategorycznymi, dysjunkcję tylko w postaci przeciwieństwa, implikację tylko w postaci subalternacji. Lecz zna również związek między alternatywą i implikacją oraz dysjunkcją i implikacją, będący zasadą wniosków ze stosunków kwadratu logicznego; zna również zasadniczą własność implikacji jako funkcji prawdziwościowej stwierdzając, że wykluczony jest przypadek, by z prawdy wynikał fałsz, natomiast z prawdy wynika prawda, a z fałszu wynika prawda lub fałsz (An. pr. B, 2).

Metody indukcji prostej, jak również indukcji sokratycznej są dla Arystotelesa wyłącznie metodami odkrywczymi, nie zaś uzasadniającymi. Arystoteles określa indukcję jako rozumowanie, w którym przesłanką jest wiedza o faktach

zawarta bądź w zdaniach jednostkowych, bądź w zdaniach o gatunkach najniższych. Wiedzy ogólnej nie można inaczej uzyskać, jak przez indukcję (An, post. A, 18), jednak za wzorem Platona rozróżnia Arystoteles indukcję i opartą na niej intelektualną intuicję, Pierwsza ujmuje to, co wspólne, a dopiero druga to, co ogólne. Przesłanką indukcji jest całość poprzedniej wiedzy faktycznej, w przeciwieństwie do rozumowania przez przykład, czyli przez analogię, w którym wystarcza jako punkt wyjścia którykolwiek z przypadków analogicznych (An. pr. B. 23, 24). Ażeby uzasadnić rozumowanie indukcyjne, sprowadza je Arystoteles do schematu sylogistycznego, zdając sobie przy tym sprawę z okoliczności, że tylko indukcja zupełna daje się w ten sposób uzasadnić. Mianowicie, jak prawo ogólne „Każde *B* jest *A*", jako przesłanka większa w sylogizmie, za pośrednictwem przesłanki mniejszej „każde *C* jest *B*", prowadzi do konkluzji „Każde *C* jest *A*", tak w rozumowaniu indukcyjnym, odwrotnie, wiedza empiryczna, że każde *C* jest *A*, jako przesłanka większa sylogizmu, prowadzi do prawa ogólnego, że każde *B* jest *A* jako konkluzji, jeżeli założy się, że przesłankę mniejszą „każde *C* jest *B*" wolno odwrócić na „każde *B* jest *C*", a to zachodzi właśnie tylko w przypadku indukcji zupełnej. Jest to podobna analiza schematu indukcji, jak ta którą Jevons i Sigwart podali pod nazwą inwersyjnej teorii indukcji.

Analityki drugie zajmują się zagadnieniem budowy nauki dedukcyjnej. Arystoteles zna tylko jeden typ rozumowania uzasadniającego, mianowicie sylogizm, gdyż, jak wspomniano, indukcja jest dlań rozumowaniem odkrywczym i nie uzasadnia swych twierdzeń. Ze względu przeto na sposób uzasadniania twierdzeń wszystkie nauki są dedukcyjne. Wśród nich rozróżnia Arystoteles wiedzę apodyktyczną i dialektyczną według oczywistości i pewności przesłanek. Wiedza apodyktyczna jest oczywista i pewna, bo takie są jej przesłanki. Wiedza dialektyczna natomiast nie jest taka, bo wychodzi od nieoczywistych i niepewnych przesłanek. Termin dialektyka ma u Arystotelesa znaczenie inne niż u Platona, zbliżone do dawniejszego znaczenia potocznego; dialektyka jest wiedzą, jaką posiada zręczny mówca, umiejący przekonać innych do swoich twierdzeń. Dialektyka ma za przesłanki twierdzenia, które wydają się prawdziwe wszystkim lub większości, lub mędrcom (Top. I. 1). Są to twierdzenia o tym, co prawdopodobne, tj. o tym, o czym się wie, że najczęściej dzieje się, jak np. że zawistni nienawidzą lub że zakochani są życzliwie usposobieni dla osób ukochanych (Anal. pr. II, 27). Nie można jednak zestawiać dialektyki arystotelesowskiej z nowożytną teorią prawdopodobieństwa, miała ona bowiem za zadanie rozwinąć nie to, co właściwe jest rozumowaniu prawdopodobnemu, lecz jedynie to, co da się utrzymać z metody dedukcyjnej w zastosowaniu do wiedzy nie-ogólnej. Związek między prawdopodobieństwem w rozumieniu arystotelesowskim i w rozumieniu nowożytnym jest jedynie pośredni przez pojęcie możliwości. Nowożytne pojęcie prawdopodobieństwa ujmuje liczbowo różne stopnie możliwości, która wchodzi u Arysto-

telesa w rozróżnienie zdań modalnych. Termin prawdopodobny oznacza u Arystotelesa wysoki stopień możliwości, odpowiada więc sposobowi użycia, który nazywa prawdopodobnym to, czego liczbowy stopień prawdopodobieństwa wynosi więcej niż $^{1}/_{2}$.

Wiedza apodyktyczna tworzy zamknięty system nauk, obejmujący nauki matematyczne, przyrodnicze i ontologię. Cechą jej jest, że wszystkie jej twierdzenia dzielą się na ostateczne założenia, same przez się prawdziwe, i na twierdzenia uzasadnione dedukcyjnie na mocy owych ostatecznych założeń. Jest to cecha, która, według później przyjętych poglądów, charakteryzuje nauki dedukcyjne, dlatego też wydaje się właściwym porównanie wiedzy apodyktycznej z naukami dedukcyjnymi w późniejszym znaczeniu tego wyrazu. Porównanie to prowadzi jednak od razu do stwierdzenia szeregu poważnych różnic.

Pierwszą z nich jest miejsce, które w arystotelesowskim systemie nauk zajmuje definicja. Nauka, według niego, składa się z dwojakiego rodzaju elementów, których rola jest w pewnym sensie równoległa: definicyj i twierdzeń. Definicje przedstawiają istotę przedmiotów badanych, twierdzenia — związki między tymi przedmiotami. W terminologii dzisiejszej można by powiedzieć, że definicja to opis, twierdzenie — to wyjaśnienie. Jesteśmy skłonni przyjąć takie przeciwstawienie w naukach przyrodniczych, jednak w naukach matematycznych definicje odgrywają dzisiaj rolę podrzędną w stosunku do twierdzeń. Arystoteles nie czyni różnicy między obu typami nauk, bo wszystkie je uważa za apodyktyczne i wszystkim kładzie za zadanie, by przedstawiały pojęcia (to, co ogólne, τὸ καθόλου) oraz ich hierarchię.

Zarówno definicje, jak i twierdzenia nauki tworzą system uporządkowany w ten sposób, iż definicje definiują terminy za pomocą terminów uprzednio zdefiniowanych, a twierdzenia są uzasadnione przez inne twierdzenia uprzednio uzasadnione. Arystoteles zakłada, że w pochodzie tym istnieje kres, mianowicie terminy pierwotne, nie dające się zdefiniować, i twierdzenia ostateczne, nie dające się udowodnić. Owe terminy pierwotne (ὅροι) i ostateczne twierdzenia (ἀξιώματα) są założeniami nauki. Rozum dochodzi do nich na drodze indukcyjnej, lecz chwyta je drogą owej intelektualnej intuicji, która daje zarówno bezpośrednie poznanie istoty rzeczy oznaczonej przez terminy pierwotne, jak też bezpośrednie stwierdzenie prawdziwości oczywistych twierdzeń ostatecznych. Terminy pierwotne mają za przedmiot najogólniejsze rodzaje, aksjomaty zaś — to najogólniejsze twierdzenia. Jedne i drugie są w swoim zakresie najprostsze i tym Arystoteles wyjaśnia ich oczywistość. Założenia obu rodzajów są bezwzględne w tym jeszcze sensie, że nie podlegają żadnej dowolności; nie mogą być dobierane w sposób dowolny, lecz rozum natrafia na nie w sposób jednoznaczny i konieczny. Arystoteles zwalcza zarówno tezę infinitystyczną, że nie ma takich założeń ostatecznych, lecz definiowanie i dowodze-

nie może postępować nieograniczenie, jak też tezę relatywistyczną, że owe założenia mogłyby być dobrane na różne sposoby. Wszystko to jest konsekwencją realistycznego stanowiska Arystotelesa, stawiającego za cel nauce odbicie obiektywnej, bezwzględnej, wiecznej rzeczywistości. Dzisiejsza teoria nauk staje raczej na stanowisku relatywistycznym, i to w dwojakim sensie, dopuszczając po pierwsze możliwość wybrania aksjomatów danej nauki spomiędzy jej twierdzeń na różne sposoby i po drugie — możliwość tworzenia różnych systemów naukowych (jak geometria euklidesowa i nieeuklidesowa) przez odrzucenie lub modyfikację niektórych aksjomatów. Za błąd formalny w budowie nauki poczytać musimy Arystotelesowi uznanie terminów pierwotnych za założenia oprócz aksjomatów; błąd ten popełnił zresztą również Euklides. Albowiem dopuszczenie oprócz aksjomatów założeń intuicyjnych, dotyczących znaczenia terminów, uniemożliwia pełne wyszczególnienie przyjętych w nauce założeń i niweczy przez to aksjomatyczną konstrukcję nauki. Dlatego w dzisiejszych systemach aksjomatycznych terminy pierwotne nie mają innego znaczenia, jak tylko to, które im zostaje nadane przez aksjomaty.

Trzecim rodzajem założeń wiedzy apodyktycznej są, według Arystotelesa, wymagalniki, czyli postulaty (αἰτήματα), tzn. założenia hipotetyczne, wprowadzające w tok dowodu lub rozumowania, jak np., że proste, o których w dowodzie będzie mowa, są równoległe, w innym zaś przypadku prostopadłe do siebie itp. Są to zatem poprzedniki twierdzeń o postaci warunkowej i same dla siebie nie tworzą twierdzeń naukowych. Dlatego dzisiaj nie wymienia się ich równolegle z aksjomatami.

System wiedzy apodyktycznej w strukturze swojej ma odbijać (jak o tym była już mowa) strukturę rzeczywistości, która jest jej przedmiotem. Terminy pierwotne mają za przedmiot przyczyny ostateczne, tzn. najogólniejsze pojęcia, a twierdzenia pierwotne są twierdzeniami, które podporządkowują rzeczywistość owym najogólniejszym przyczynom. Taki układ wiedzy prowadzi do jej klasyfikacji, a w szczególności do podziału wiedzy teoretycznej na fizykę (o tym, co zmienne), matematykę (o tym, co niezmienne) i pierwszą filozofię (o tym, co jest, o ile jest). Logika nie wchodzi do tego systemu nauk, jej przedmiotem bowiem jest nie rzeczywistość będąca przedmiotem tamtych nauk, lecz same nauki. Logika zajmuje przeto w systemie Arystotelesa miejsce, które dzisiaj określa się terminem „metateoria". Niezrozumieniem tego stanowiska był rozpowszechniony już w starożytności pogląd określający stosunek logiki do innych nauk z punktu widzenia dydaktycznego jako nauki propedeutycznej lub z punktu widzenia technicznego jako zbioru przepisów rozumowania. W szczególności to ostatnie jest niezgodne ani z całością arystotelesowskiego układu nauk (bo wtedy logika musiałaby być zaliczona do nauk praktycznych), ani z tekstem pism logicznych Arystotelesa, które zawierają twierdzenia logiczne w formie implikacyj, nie zaś dyrektyw rozumowania.

3. Logika stoików

Filozofia starożytna wydała drugi jeszcze oprócz arystotelesowskiego system logiki, mianowicie logikę stoicką, będącą dziełem głównie Chrysippa ze Soloi w Cylicji (ok. 280—205). Logika ta, równie jak arystotelesowska, miała metodę dedukcyjną filozofowania za punkt wyjściowy opracowania teoretycznego, jednakże nie nawiązywała ona do platonizmu. Jej źródła tkwią w badaniach tej spomiędzy szkół sokratycznych, która zajęła się przede wszystkim rozwinięciem logicznej strony metody sokratycznej, to jest szkoły megarejskiej. Założona przez Euklidesa z Megary, młodszego rówieśnika Sokratesa, szkoła ta głośna była głównie z paradoksów logicznych, które bawiły i drażniły opinię (jednym z tych paradoksów jest „kłamca" por. 123); głębsze dziedziny jej działalności zachowały się jedynie w nielicznych fragmentach, z których można wnosić, że logika megarejska znała prawdziwościowe funkcje zdaniowe. Diodoros Kronos, jeden z wybitnych megarejczyków (zm. 307 przed Chr.) i nauczyciel stoika Zenona z Kittion, zdefiniował w sposób zupełnie ogólny i zgodny z dzisiejszym pojmowaniem sprawy implikację formalną, a uczeń Diodora Filon (współtowarzysz Zenona z Kittion, zaliczany bądź do megarejczyków, bądź do stoików) — implikację materialną. Definicja implikacji (τὸ συνημμένον) u Diodora określa ją jako zdanie warunkowe, którego poprzednik nie może być prawdziwy przy fałszywym następniku, może być zaś tylko to, co jest lub będzie; przykładem jest zdanie „*si quis oriente canicula natus est, in mari non morietur*", tzn. „jeżeli ktoś urodził się pod znakiem wschodzącego Psa (gwiazdozbiór Psa na południowym horyzoncie), nie umrze na morzu" (Prantl I, 456), przy czym *quis* jest zmienną nazwową, zamiast której można wstawić np. *Fabius*. Zdanie powyższe jest przeto implikacją która zachodzi, jeżeli dla żadnej wartości zmiennej nie jest ani nie zdarzy się w przyszłości, by poprzednik był prawdziwy, a następnik fałszywy. Filon natomiast definiuje implikację jako połączenie dwóch zdań, które nie zaczyna się od prawdy, gdy kończy się na fałszu; według tego zatem określenia implikacją jest np. zdanie „jeżeli ziemia ma skrzydła, to ziemia istnieje", którego poprzednik jest fałszywy, a następnik prawdziwy, natomiast nie jest implikacją zdanie „jeżeli ziemia istnieje, to ma skrzydła", gdyż poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy (Prantl I, 454).

Logika stoicka wychodzi również, jak logika Arystotelesa, od określenia zdania jako wyrażenia, które jest prawdziwe lub fałszywe i przeciwnie niż Arystoteles, pozostaje konsekwentnie przy tym określeniu, nie wprowadzając żadnych dodatkowych założeń co do struktury zdania; co więcej, stoicy pierwsi dopatrzyli się w zdaniu odrębnej funkcji poznawczej uznania lub odrzucenia, nie dającej się sprowadzić do połączenia terminów. Traktują oni przeto zdanie jako element logiczny i mogą wprowadzając zmienne zdaniowe ujmować zależności międzyzdaniowe w całej ogólności. Spomiędzy zależności międzyzda-

niowych stoicy znali negację, implikację, koniunkcję, alternatywę i dysjunkcję; definiowali je jako funkcje prawdziwościowe, podobnie jak to czyni się dzisiaj. Znali też stoicy zależności między tymi funkcjami pozwalające przekształcać pewne twierdzenia logiczne na inne i uzasadniać pochodne typy wnioskowania przez sprowadzenie ich do pięciu typów pierwotnych:

I. Jeżeli *p*, to *q*; — otóż *p*: a więc *q*.
II. Jeżeli *p*, to *q*; — otóż nie-*q*: a więc nie *p*.
III. Nie zarazem *p* i *q*; — otóż *p*: a więc nie-*q*.
IV. *p* albo *q*; otóż *p*: a więc nie-*q*.
V. *p* lub *q*; otóż nie-*q*: a więc *p*.

Owe pierwotne typy wnioskowania są formułowane przez stoików jako dyrektywy rozumowania. Jednakże umieją stoicy zamieniać je na tezy logiczne postaci implikacyjnej, tak iż owe reguły wnioskowania zajmują w logice stoickiej miejsce aksjomatów.

Logika stoicka była wolna od ograniczeń zacieśniających logikę arystotelesowską, ponieważ nie była krępowana założeniami ogólnofilozoficznymi realizmu arystotelesowskiego. Stanowisko filozoficzne stoików charakteryzuje nominalizm w dziedzinie ontologicznej oraz empiryzm metodologiczny w dziedzinie epistemologicznej. Odpadały więc powody, które skłoniły Arystotelesa do wprowadzenia wyłącznie zmiennych nazwowych i zacieśnienia zakresu logiki w sposób, o jakim była poprzednio mowa. Logika stoicka w swoim założeniu (jakkolwiek nie w opracowaniu) była całkowicie ogólną logiką zdań w dzisiejszym tego słowa znaczeniu.

Stoicy dzielili filozofię na logikę, fizykę i etykę. Logika jest więc w stoickim systemie wiedzy jedną z nauk filozoficznych, przy czym, zgodnie z tendencjami ujawniającymi się także w innych szkołach filozoficznych, nadawano jej rolę nauki propedeutycznej w stosunku do pozostałych nauk filozoficznych. Stoicy pierwsi użyli terminu logika jako nazwy dla nauki o znaku i o tym, co on oznacza. Do tak pojętej logiki zaliczali naukę o języku, a więc gramatykę i retorykę, oraz naukę o prawdziwości zdań, obejmującą rozważania epistemologiczne i logiczne w naszym rozumieniu. Tę ostatnią część logiki nazywali dialektyką. W późniejszej tradycji filozoficznej przez długi czas, bo przez całe wieki średnie i później, bezsporną przewagę otrzymuje termin dialektyka", oprócz którego występuje też niekiedy — przyjęty przez epikureizm, a pochodzący zdaje się od Demokryta — termin „kanonika". Dopiero od w. XVII ustala się ostatecznie termin „logika", wypierając wszystkie nazwy poprzednio z nim współzawodniczące.

4. Logika w późniejszych starożytności

Rozwój logiki w późniejszej starożytności jest żywy i ciągły, nie przynosi jednak niczego istotnie nowego do obu jej systemów, arystelesowskiej logiki

nazw i stoickiej logiki zdań. Powstają monografie poświęcone specjalnym zagadnieniom, pisma polemiczne, a ku końcowi tego okresu komentarze i podręczniki. Przeważna część tej twórczości pochodzi ze szkoły perypatetyckiej.

Bezpośredni uczeń Arystotelesa i następca jego na stanowisku scholarchy perypatetyckiego, Teofrastos, rozszerza logikę Arystotelesa w dwóch kierunkach. Formy sylogizmu kategorycznego wzbogaca wprowadzając do pierwszej figury, oprócz czterech trybów Arystotelesa, pięć dalszych, zwanych pośrednimi, bo dają się wywieść z przesłanek jedynie za pośrednictwem odwrócenia przesłanek lub konkluzji. Są to tryby zaliczone później (przez Galenosa, zob. niżej) do figury czwartej (Arystoteles bowiem rozróżnił tylko trzy figury sylogizmu, nie biorąc pod uwagę porządku przesłanek różniącego figurę pierwszą od czwartej). Innym wzbogaceniem form arystotelesowych było uwzględnienie przesłanek kategorycznych (o zmiennych nazwowych) alternatywnych, np. „*A* jest *B* lub *C*". Najważniejszą jednak nowością było wprowadzenie sylogizmów międzyzdaniowych, mianowicie sylogizmu hipotetycznego: „Jeżeli *A*, to *B*; jeżeli *B*, to *C*, przeto jeżeli *A*, to *C*", w którym litery *A*, *B*, *C* są już nie zmiennymi nazwowymi, jak u Arystotelesa, lecz — jak okazują przytoczone przykłady — zmiennymi zdaniowymi, oraz sylogizmów *modus ponens* i *modus tollens*: „jeżeli *A*, to *B*; otóż *A*, przeto *B*", „jeżeli *A*, to *B*; lecz nie-*B*: przeto nie-*A*. Ze względu na nie musimy uważać Teofrasta, podobnie jak megarejczyków, za źródło logiki stoickiej (Pr. I, 382, 387).

Cenionym autorem logicznym był lekarz Galenos (129—199 po Chr.), któremu przypisuje się wydzielenie teofrastowskich pośrednich trybów sylogistycznych pierwszej figury w figurę czwartą („galenowską"). Galenos zajmuje się wyczerpująco odwracaniem zdań, w związku z czym znajdujemy u niego po raz pierwszy funkcję prawdziwościową równoważności w odniesieniu do zdania i jego odwrócenia oraz rozróżnienie konwersji i kontrapozycji zdania kategorycznego (Pr. I 568). Galenos też ma zasługę, iż jako pierwszy w polemice ze sceptykami wyraźnie wskazał logice postulat postaci aksjomatycznej, na wzór geometrii (Pr. L 562); jakkolwiek mogło się to wydawać bliskim ze względu na powszechnie uznany apodyktyczny charakter logiki, podobnie jak matematyki, wprowadzenie tej myśli w życie nastąpiło dopiero w czasach nowożytnych.

Monografią z końca starożytności, która odegrała wielką rolę w logice średniowiecznej, jest rozprawa neoplatonika Porfiriusza (232—304) *Wstęp do Kategoryj Arystotelesa* (zwana krótko *Wstępem* — *Isagoge*). Rozprawa ta określa i objaśnia pojęcia sposobów orzekania (*praedicabilia*), uogólniając klasyfikację z arystotelesowskich *Topik*, w których rozróżnienie zagadnień i tematów dysput było przeprowadzone według zasady, czy orzeka się w nich o rzeczach rodzaj, gatunek, właściwość lub przypadłość.

Wśród pism polemicznych w kwestiach logiki najważniejsze są pisma sceptyka i lekarza Sextosa Empiryka (ok. 150 po Chr.), a w szczególności jego dzieło *Przeciwko dogmatykom*, skierowane głównie przeciw filozofii stoickiej.

Polemika dotyczy nie formalno-logicznych, lecz epistemologicznych podstaw systemu stoickiego, jest jednak szczególnie ważna dla historii logiki przez to, że Sextos dokładnie zna i rozumie logikę stoicką; wobec niedochowania się pism logicznych Chrysippa i innych stoików dzieła Sextosa są najważniejszym źródłem, z którego czerpiemy znajomość logiki stoickiej.

Spomiędzy starożytnych komentatorów logiki Arystotelesa najwybitniejszy jest Aleksander z Afrodyzji (ok. 200 po Chr.). Na wzmiankę zasługują spośród innych perypatetyk Temistios (w w. IV po Chr.) oraz neoplatonicy Ammonios (w V w. po Chr.) i Simplikios (w w. VI po Chr.), a wreszcie piszący po łacinie Boecjusz (ok. 480—525). Wszyscy oni w erudycyjnych komentarzach ustalili tradycyjny całokształt logiki arystotelesowskiej z niektórymi modyfikacjami zaczerpniętymi z logiki stoickiej — oba bowiem systemy logiczne wielostronnie na siebie oddziaływały — a nadto przekazali czasom późniejszym wiele szczegółów z zaginionych traktatów logicznych innych autorów.

Anitius Manlius Severinus Boethius (Boecjusz) odgrywa rolę w historii logiki jako tłumacz na język łaciński i komentator pism logicznych Arystotelesa, jako jeden z twórców łacińskiej terminologii logicznej (której początki dali jeszcze w I w. przed Chr. Varro i Cicero) oraz jako autor podręczników. Poprzednikami Boecjusza jako autora podręczników byli: wspomniany wyżej Galenos, autor pierwszego podręcznika logiki w języku greckim (*Institutio logica* — *Wprowadzenie do logiki* retor i eklektyk filozoficzny Apulejusz z Madaury (w w. II po Chr.), którego łaciński podręcznik łączył elementy logiki perypatetyckiej z zapożyczeniami stoickimi (Pr. I, 578), oraz Martianus Capella, łaciński neoplatonik z w. V, autor kompilacyjnego podręcznika logiki (podtytułem *Dialektyka*) w obrębie encyklopedycznego opracowania obejmującego siedem nauk szkolnych *trivium* (gramatykę, dialektykę i retorykę) oraz *quadrivium* (geometrię, arytmetykę, astronomię i muzykę). Boecjusz pozostawił łacińskie tłumaczenia wszystkich części *Organonu* z komentarzami do dwóch pierwszych oraz monograficzne podręczniki *De divisione, De definitione, De syllogismo categorico, De syllogismo hypothetico*. W pismach tych zbiera poglądy tradycyjne i ustala je w postaci, w jakiej przetrwały one wieki średnie i nawet czasy późniejsze. W szczególności dotyczy to zakresu i układu poszczególnych części logiki tradycyjnej z nauką o terminach na czele, po której następuje nauka o zdaniach, a wreszcie nauka o wnioskach; zasadą tego układu jest przechodzenie od elementów do złożonych z nich całości (Pr. I, 680). Znajduje się już u Boecjusza kwadrat logiczny w postaci, w jakiej jest do dzisiaj przytaczany, odwracanie zdań wprost i przez kontrapozycję (Pr. I, 691) oraz sformułowanie *dictum de omni etde nullo* jako zasady sylogizmu (Pr. I, 699). W pracy o sylogizmie hipotetycznym przedstawia Boecjusz rozumowania oparte na międzyzdaniowych związkach implikacji i alternatywy, posługując się przy tym, za wzorem stoików,

zmiennymi zdaniowymi; twierdzi jednakże, że sylogizm hipotetyczny czerpie uzasadnienie z kategorycznego, uzależnia przeto w ten sposób logikę zdań od logiki nazw (Pr. I, 700).

Znaczenie Boecjusza polega na tym, iż był on pośrednikiem między logiką starożytną i średniowieczną. Przez długie wieki filozofia średniowieczna czerpała wiedzę logiczną prawie wyłącznie z pism i tłumaczeń Boecjusza.

5. Logika średniowieczna

W wiekach średnich logika stała się przedmiotem szkolnym jako część *trivium* oraz nauką pomocniczą prawa i teologii. Te dwie okoliczności, a nadto fakt, iż opierała się na tradycji starożytnej, przekazanej w podręczniku Marcjana Capelli i pismach Boecjusza, tłumaczą drogi rozwojowe jej dziejów w pierwszym okresie średniowiecza. Rozważania logiczne toczą się według utartych wzorów, a nasuwające się nowe zagadnienia mają swój początek zewnątrz nich w zastosowaniach teologicznych. Pierwsze takie zagadnienie powstało w w. XI, dotyczyło zaś zakresu stosowalności twierdzeń logicznych. Niektórzy z ówczesnych nauczycieli dialektyki zarazem teologowie, jak Berengariusz z Tours, stawiali wyżej autorytet dialektyki niż autorytet dogmatów i głosili zasadę krytyki artykułów wiary ze stanowiska logicznego. Krytyce tej poddawano naukę o Trójcy, o Eucharystii, o nieśmiertelności duszy i in. Takie stanowisko wywołało reakcję ze strony teologicznej, której czołowym przedstawicielem stał się kardynał Piotr Damiani z Rawenny. Damiani postawił kwestię granic stosowalności logiki na tle konkretnego zagadnienia teologicznego boskiej wszechmocy i rozstrzygnął ją twierdzeniem, że nie tylko prawa przyrody, lecz także prawa logiki wraz z zasadą sprzeczności są boskiej woli poddane i mają tylko względne znaczenie; obowiązują mianowicie tylko w obrębie ograniczonej ludzkiej logiki. Stąd zaś wniosek, że dialektyka nie może żądać dla siebie prawa rozstrzygania zagadnień dotyczących tajemnic boskich, lecz, jak sługa swej pani (*velut ancilla dominae*), winna poddać się w tym zakresie wymaganiom teologii.

Drugie zagadnienie wyłoniło się w w. XII w związku z przeciwieństwem ontologicznych stanowisk realizmu i nominalizmu. Zaostrzenie dawniej już znanego rozróżnienia nastąpiło na tle teologicznego sporu w sprawie nauki o Trójcy w Bogu, wszczętego przez nominalistę Roscellina. W dziedzinie logiki spór realizmu z nominalizmem jest przede wszystkim sporem o jej przedmiot. Realizm, przyjmujący istnienie przedmiotów ogólnych odpowiadających ogólnym terminom, prowadzi do poglądu, według którego logika jest nauką o owych przedmiotach ogólnych i związkach między nimi, jakkolwiek może też realizm łączyć się z poglądem odmiennym, według którego logika jest nauką o terminach i związkach między terminami; nominalizm natomiast, odrzucający istnienie przedmiotów ogólnych, może pojmować logikę jedynie

w ów drugi sposób. Inną konsekwencją stanowiska nominalistycznego w logice jest redukcja semantyczna zdań, w których podmiotach występują terminy ogólne. Zdania takie muszą być interpretowane jako zdania o indywiduach, a więc wszelkie zdania redukują się do zdań jednostkowych, te stanowią podstawową kategorię zdań. Wreszcie trzecią konsekwencją nominalizmu jest interpretacja zakresowa związków międzynazwowych, realizm natomiast interpretuje zazwyczaj związki te treściowo.

Wiek XII przyniósł średniowiecznej filozofii zachodnio-europejskiej znajomość szeregu zapomnianych dotąd pism Arystotelesa, między którymi z pism logicznych były *Analityki pierwsze i drugie*, *Topiki* oraz *O dowodach sofistycznych*. Weszły one szybko w całość logicznej literatury szkolnej jako *Logica nova*, w przeciwstawieniu do *Logica vetus*, która obejmowała poprzednio znany materiał szkolny, tj. dwie pierwsze części *Organonu*, *Wstęp* Porfiriusza, pisma Boecjusza i niektóre inne z późnej starożytności. To wzbogacenie źródeł nie wzbogaciło jednak na razie myśli logicznej ani w nowe zagadnienia, ani też w w nowe rozwiązania.

W pierwszej połowie w. XIII materiał logiki średniowiecznej doznał raz jeszcze rozszerzenia, tym razem przez nieznane bliżej źródła; domyślać się można, że były one pochodzenia arabskiego lub bizantyńskiego (przypuszczenie, że pośrednikiem był tu traktat autora bizantyńskiego z w. XI Michała Psellosa, okazało się mylne). Źródła te odnowiły elementy stoickie, które — dołączone do poprzednio uprawianej logiki arystotelesowej (*vetus et nova*), zwanej odtąd *Logica antiqua* — dały nową postać logiki średniowiecznej, *Logica modernorum*. Zewnętrznym wyrazem rozwoju logiki w tym okresie było pojawienie się trzech podobnych do siebie w układzie i treści kompendiów logicznych; dotychczas bowiem twórczość w dziedzinie logiki mieściła się w komentarzach do pism Arystotelesa, Boecjusza i innych. Autorami tych kompendiów byli Wilhelm Shyrewood, Lambert z Auxerre i Petrus Hispanus z Lizbony (późniejszy papież Jan XXI), którego dzieło *Summulae Logicales* uzyskało rozgłos największy i miało jeszcze w w. XV i XVI blisko 50 wydań drukiem.

Logica modernorum przynosi dwa najważniejsze uzupełnienia:

a) Pod tytułem *De proprietatibus terminorum* (o własnościach terminów) omawia funkcje semantyczne części zdania, mianowicie nazw występujących w podmiocie i orzeczeniu zdania oraz funktorów nazwotwórczych i zdaniotwórczych, zwanych tu wyrazami synkategorematycznymi (współorzekającymi). Wśród funkcji semantycznych nazw omawia się znaczenie (*significatio*) i supponowanie (*suppositio*) wraz z innymi mniejszej doniosłości, (*significare* — mniej więcej tyle, co znaczyć lub współoznaczać, *supponere* — oznaczać). Wyrażenia synkategorematyczne są określane bądź jako tzw. *exponibilia* (wyrażenia wymagające rozwinięcia), np. „każdy", „jakiś", „tylko", „oprócz" przez definicje uwikłane, np. „tylko A jest B", to tyle, co „każde B

jest A" (Pr. III 69—260), bądź jako *coniunctiones*, tj. spójniki międzyzdaniowe, konsekutywne „jeżeli", kopulatywne „i", dysjunktywne „lub" (Pr. III 23—83); określenia *coniunctiones* są określeniami funkcji prawdziwościowych implikacji (*propositio hypothetica conditionalis*), koniunkcji (*copulativa*) i alternatywy (*disiunctiva*): w pierwszej mianowicie poprzednik nie może być prawdziwy bez prawdziwego następnika, w drugiej oba składniki muszą być prawdziwe, w trzeciej musi być prawdziwy przynajmniej jeden z nich (Pr. III, 43—158).

b) *De consequentiis* (o związkach wynikania) jest ogólną teorią związków międzyzdaniowych, obejmującą zarówno sylogizm kategoryczny, jak i wszelkie inne odmiany wniosków. Doniosłość teorii konsekwencji polega na tym, że złączyła ona oba systemy logiki starożytnej, arystotelesowski i stoicki, w jedną teorię wnioskowania i uczyniła to w sposób całkowicie poprawny, pojmując sylogizm kategoryczny jako implikację, w której przesłanki są poprzednikiem (*antecedens*), konkluzja — następnikiem (*consequens*). (Pr. III 139—613). Teoria konsekwencyj rozróżnia nadto całkiem stanowczo implikację i regułę wnioskowania przez odrywanie jako *coniunctio conditionalis* przez „*si*" i *coniunctio rationalis* (*ratio* — rozumowanie) przez „*igitur*" lub „*ergo*". Konsekwencje dzielono na formalne i materialne. Konsekwencje formalne to te, które można otrzymać z jakiegoś prawa logicznego przez podstawienie, taka jest np. konsekwencja „jeżeli żaden kwadrat nie jest kołem, to żadne koło nie jest kwadratem". Konsekwencją materialną nazywano zaś takie połączenie zdań, które zamienia się na konse- kwencję formalną przez dołączenie dodatkowej przesłanki; taka jest np. konsekwencja „dziś jest czwartek, przeto jutro jest piątek", którą przez dołączenie przesłanki „jeżeli dziś jest czwartek, to jutro jest piątek" zamienia się na konsekwencję formalną, mianowicie podstawienie sylogizmu hipotetycznego *modus ponens*. Znano liczne twierdzenia o konsekwencjach identyczne z tezami dzisiejszej teorii zdań, jak np., że z zaprzeczenia następnika okresu warunkowego wynika zaprzeczenie poprzednika (prawo transpozycji 222,7), że ze zdania fałszywego wynika cokolwiek (por. 222,5), że zdanie prawdziwe wynika z jakiegokolwiek zdania (por. 221,2) itp. (Pr. III 141—622).

Nauka o konsekwencjach nie zawiera się jeszcze w podręczniku Piotra Hiszpana ani w obu poprzednich. Natomiast jest ona już szczegółowo rozwinięta w pismach Dunsa Szkota z początku w. XIV. Duns Szkot oraz Wilhelm z Ockham w pierwszej połowie w. XIV są najwybitniejszymi przedstawicielami rozkwitu logiki średniowiecznej.

Rozdział 2. Czasy nowożytne i nowoczesne

1. Logika heurystyczna

Początki filozofii nowożytnej znamionuje negatywna postawa względem tradycji średniowiecza a zarazem zwrot do badań empirycznych. Obie te cechy

wyciskają swe piętno na początkach nowożytnej logiki: jest ona opozycyjna w stosunku do logiki średniowiecznej w tym, że pomniejsza znaczenie rozumowania uzasadniającego, przede wszystkim sylogizmu, natomiast kładzie nacisk na metody heurystyczne badań naukowych.

Hasło, że logika jest nauką o odkrywaniu, głoszą w w. XVI Ludovico Vives (*De disciplinis*, 1531) i Pierre de la Ramée (Petrus Ramus, *Institutiones dialecticae*, 1543); są to jednak na razie tylko hasła. Nową metodologię heurystyczną usiłuje opracować Francis Bacon of Verulam (*Novum Organon*, 1620) przez analizę metod badania indukcyjnego. Bacon obejmuje terminem indukcja obie metody dochodzenia od zdań o faktach do uogólnień, którymi posługiwała się filozofia starożytna. Indukcję prostą uważa jednak za nienaukową (*res puerilis*), uznaje jedynie indukcję przez eliminację, którą pojmuje w sposób całkowicie podobny do indukcji sokratycznej. Mianowicie, jak u Sokratesa, indukcja miała dać poznanie cnót, a więc pewnych właściwości człowieka, przez wykrywanie ich składników koniecznych i wystarczających, tak według Bacona zadaniem indukcji jest dostarczanie wiedzy o właściwościach (naturach) rzeczy przez wykrywanie tych ich składników (form), które wszędzie i tylko tam występują, gdzie znajdują się owe natury. Formy nazywa Bacon także prawami (*leges*); jeżeli bowiem potrafimy połączyć formy pewnej natury z jakimkolwiek ciałem, to nadamy mu odpowiednią naturę. Indukcja rozpoczyna się od ułożenia tablic trojakiego rodzaju: *Tabula essentiae sive praesentiae* wymienia wszystkie znane przypadki (*instantiae*), w których występuje badana natura, tak np. natura ciepła występuje w promieniach słońca, w płomieniu ognia, w ciałach zwierzęcych, nawozie itd. *Tabula declinationis sive absentiae in proximo* zestawia przypadki, w których brak badanej natury, np. nie ma ciepła w płynach naturalnych, w promieniach księżyca, w łodygach i liściach roślin itd. Wreszcie trzecia jest *Tabula graduum sive comparativae*, zestawia ona przypadki zmienności badanej natury, jej stopień silniejszy lub słabszy w tym samym ciele lub jej występowanie w różnych ciałach z rozmaitą siłą; nic bowiem nie może być formą danej natury, co wraz z nią nie zwiększa się lub nie zmniejsza, tak np. u tych samych istot żywych ciepłota ciała zmienia się przy ruchu lub natężeniu, u różnych zwierząt jest rozmaita itd. Według owych tablic indukcja wyszukuje formę, która z badaną zas naturą istnieje łącznie, której łącznie z nią nie ma i która wreszcie łącznie wraz z nią się zmienia. Wstępnym przeto krokiem indukcji jest eliminacja wszystkich czynników, nie będących formą danej natury według wyżej wskazanych kryteriów. Krok następny zbiera instancje pozytywne, wskazuje np., iż formą ciepła jest ruch szczególnego rodzaju, mianowicie ruch cząsteczek ciała materialnego; gdy ruch taki potrafiliśmy wzbudzić w ciele, to powstaje w nim ciepło. Ten pierwszy rezultat jest jednak jeszcze tymczasowy (*interpretatio inchoata*), trzeba go wzmocnić przez badanie przypadków wybranych (*praerogativae instantiarum*), których rozróżnia się 27 odmian; są to takie, w których badana natura wy-

stępuje sama jedna lub w których można formę właściwą dla danej natury oddzielić od innych itd.

2. Psychologizm w logice

Bacon nie porusza zagadnienia, jak uzasadnione są wyniki uzyskane przez zastosowanie metod indukcyjnych, nie ma on jeszcze żadnych wątpliwości w tym przedmiocie. Zagadnienie uzasadnienia zdobywanej wiedzy wyłania się natomiast u René Descartes'a, (*Discours de la méthode*, 1637), który zajmuje wobec logiki stanowisko zupełnie podobne, jak poprzednio wymienieni autorowie, ganiąc logikę szkolną i formułując zamiast niej *regulae ad directionem ingenii*, tj. wskazówki poszukiwań naukowych. (*Rozpr. o met.* II al. 6. Wstęp franc. do *Princ. Philos.* AT — IX 2, 13, 24, 29n). Negatywna postawa wobec logiki klasycznej każe szukać uzasadnienia wyników badań gdzie indziej Zgodnie z całą swoją postawą poznawczą przenosi je Descartes w dziedzinę psychologiczną, mianowicie; to jest należycie uzasadnione, co jasno i wyraźnie poznaję. Descartes obejmuje swoją zasadą oczywistości oba zagadnienia uzasadnienia, które postawił Arystoteles w *Analitykach*, to jest zagadnienie dowodzenia twierdzeń i zagadnienie prawdziwości aksjomatów; mianowicie oczywistość jest dlań koniecznym i wystarczającym warunkiem zarówno dla uznania prawdziwości aksjomatów, jak i poprawności dowodów — dowód jest poprawny, jeżeli każdy jego krok jest oczywisty. Oba te zagadnienia nie są jednak jednego rodzaju; zagadnienie prawdziwości aksjomatów jest zagadnieniem epistemologicznym, zagadnienie dowodzenia twierdzeń zaś — zagadnieniem logicznym. Odtąd też aż po czasy nam współczesne splatają się rozważania logiczne z psychologicznymi i epistemologicznymi, Descartes stoi u początku rozwoju, który wynika w sposób, można by powiedzieć, naturalny z postawy metodologicznej tych czasów, kiedy tak wielki nacisk położono na odkrywczość. Odkrywanie w nauce — to proces psychologiczny. Zbadanie genezy i właściwości tego procesu może wydawać się odpowiednią drogą do uzasadnienia epistemologicznego i logicznego wiedzy, która jest jego rezultatem.

Na tę drogę wszedł zupełnie świadomie John Locke (*An Essay concerning human understanding*, 1690), dając podstawę dla kierunku zwanego psychologizmem w logice. Locke pragnie przeprowadzić badanie źródeł wiedzy, aby ustalić stopień jej pewności i jej granice, Wyniki analiz Locke'a w kwestii uzasadnienia wiedzy obracają się w granicach kartezjańskiego rozróżnienia wiedzy intuicyjnej pewnej, bo opartej na oczywistości, i niepewnej wiedzy zmysłowej. Dawid Hume (*Treatise on human nature*, 1738) postępując drogą wskazaną przez Locke'a doszedł do nowych rezultatów. Wiedza oczywista jest wiedzą jedynie o związkach między ideami, wiedza o faktach opiera się na stosunkach przyczynowych między faktami. Źródłem twierdzeń o związkach przyczynowych jest kojarzenie przedstawień, które powstaje, gdy obserwujemy ich następowanie po sobie w powtarzających się przypadkach Wszelkie przeto wykracza-

jące poza bezpośrednie spostrzeganie twierdzenia o faktach, a należą do nich twierdzenia indukcyjne, mają tylko subiektywną podstawę w kojarzeniu, brak im obiektywnego uzasadnienia.

Logika psychologistyczna stała się w w. XIX logiką pozytywizmu angielskiego, jej czołowym przedstawicielem jest John Stuart Mill (*A System of Logic, Ratiocinative and Inductive*, 1843). Mill znajduje się pod wyraźnym wpływem Hume'a. Psychologizm Milla ujawnia się w określeniu przedmiotu logiki i w nierozróżnieniu zagadnień z jednej strony psychologicznej genezy zdań, z drugiej strony ich uzasadnienia. Logika jest według Milla nauką o czynnościach umysłowych, w których przechodzimy od rzeczy znanych do nieznanych, czyli o rozumowaniach. Pierwotną formą rozumowania jest rozumowanie od szczególnego przypadku do nowego przypadku analogicznego; oparte jest ono na kojarzeniu przedstawień: kto sparzył się w palec włożywszy go w płomień, wierzy, że jeśli drugi raz postąpi tak samo, oparzy się znowu. Stałe powtarzanie się tego rodzaju wniosków, którym żaden fakt nie zaprzecza, budzi pewność, że to, co zdarzyło się raz w określonych okolicznościach, powtórzy się za każdym razem, jeżeli tylko zajdą ponownie owe okoliczności. To prawo jednostajności przyrody staje się zasadą ogólną, na której z kolei opiera się indukcja, tj. wnioskowanie od szczegółowego przypadku do zdania ogólnego. Indukcja jest jak gdyby streszczeniem szeregu aktów pierwotnej formy rozumowania przez skojarzenie, a zdanie ogólne jest jak gdyby formułą skrótową, rejestrującą zbiór poszczególnych przypadków jednego typu (taka interpretacja zdania ogólnego występuje odtąd bardzo często wśród pozytywistycznych metodologów). Dedukcja zaś od zdania ogólnego do przypadku szczegółowego nie daje niczego nowego, gdyż ów przypadek szczegółowy jest wraz ze wszystkimi innymi zarejestrowany w zdaniu ogólnym; dedukcja jest jedynie jak gdyby odcyfrowaniem poprzednio sporządzonej notatki.

Logika psychologistyczna krzewiła się silnie aż do w. XX. W Niemczech dali jej początek Jacob Friedrich Fries (*System der Logik*, 1811) oraz Friedrich Eduard Beneke (*Lehrbuch der Logik als Kunstlehre des Denkens*, 1832). Ten głosi pogląd, że psychologia jest podstawową nauką filozoficzną, a logika — podobnie jak inne nauki filozoficzne — to stosowana psychologia. Zadaniem logiki jest opis form myślenia i genetyczny wywód form złożonych z form prostych. Wśród autorów licznych opracowań logiki tego kierunku na uwagę zasługuje Christoph Sigwart (*Logik*, 1873—78).

3. Reakcja antypsychologistyczna

a) Kant i logika transcendentalna

Psychologistyczne stanowisko Hume'a zostało poddane krytyce zarówno co do metody, jak i co do wyników przez Immanuela Kanta. Kant (*Kritik der reinen Vernunft*, 1781) sądzi mianowicie, że uzasadnienia wiedzy należy

szukać nie przez badanie psychologiczne czynności poznawczych, lecz przez analizę treści poznania. Kant przeczy nadto zdaniu Hume'a, że pewna jest jedynie wiedza o stosunkach między ideami (wiedza analityczna w terminologii Kanta), albowiem matematyka i mechanika teoretyczna zawierają nieanalityczną wiedzę o faktach (Kant nazywa ją wiedzą syntetyczną), która jest pewna. Pewność jej winna być wyjaśniona przez analizę treści poznania. Żądane wyjaśnienie znajduje Kant w stwierdzeniu, iż istnieją powszechne i konieczne składniki wiedzy o faktach, które należą do formy, nie do materii poznania i zawarte są w twierdzeniach matematyki i mechaniki teoretycznej. Materię poznania umysł otrzymuje z zewnątrz, tworzą ją wrażenia zmysłowe powstające w umyśle pod wpływem działań zewnętrznych, formą poznania jest układ, w który umysł ujmuje wrażenia zmysłowe. Formę poznania umysł sam narzuca niejako przedmiotom i pewność twierdzeń matematyki oraz mechaniki teoretycznej tym jest uzasadniona, iż przedmioty, których one dotyczą, są ukształtowane zgodnie z ich treścią przez narzucone na owe przedmioty formy poznania. Badanie, które ma na celu uzasadnić obiektywność wiedzy, nazywa Kant transcendentalnym, tj. dotyczącym stosunku wiedzy do jej przedmiotu. Przedmiotem badania transcendentalnego są składniki formalne poznania, bo właśnie dzięki nim powstaje odpowiedniość między wiedzą i jej przedmiotem. Składniki te są dwojakie, odpowiednio do dwojakich elementów wiedzy, mianowicie przedstawień i sądów. Formami przedstawiania są czas i przestrzeń, wszystko bowiem, co sobie przedstawiamy, jest w czasie i w przestrzeni. Formy sądzenia nazywa Kant kategoriami; są to pojęcia, pod które przedmioty podporządkowujemy wydając o nich sądy. Nauce o formach przedstawiania nadaje Kant nazwę estetyki transcendentalnej, nauce o formach sądzenia — nazwę logiki transcendentalnej. Logika transcendentalna różni się według Kanta od logiki formalnej stworzonej przez Arystotelesa tym, że logika formalna abstrahuje całkowicie od treści poznania i stosunku poznania do przedmiotów, a zajmuje się tylko związkami prawdziwościowymi między zdaniami — natomiast logika transcendentalna abstrahuje jedynie od tego, co w treści sądów jest zmienne i przypadkowe, zajmuje się zaś tymi składnikami ich treści, które są powszechne i konieczne. Tymi składnikami są właśnie wspomniane wyżej kategorie. Jest ich tyle, ile jest rodzajów sądów, tych zaś wylicza Kant dwanaście, w czterech grupach: ilości (ogólne, szczegółowe, jednostkowe), jakości (twierdzące, przeczące, limitujące), stosunku (kategoryczne, hipotetyczne, dysjunktywne) i modalności (problematyczne, asertoryczne, apodyktyczne). Każdy sąd należy do czterech spomiędzy owych rodzajów, mianowicie do jednego w każdej grupie, i łączy podmiot i orzeczenie w jedność podporządkowaną pod kategorię odpowiadającą rodzajowi sądu w ten sposób, iż przedstawienie np. czerwonej róży zamienia się na przedmiot doświadczenia, tj. obiektywizuje się niejako w stwierdzeniu, że niektóre róże są czerwone; mianowicie sąd ten jako szczegółowy tworzy syntezę róży i jej barwy, podporządkowaną pod kate-

gorię wielości, jako twierdzący podporządkowuje tę syntezę pod kategorię realności, jako kategoryczny — pod kategorię substancji i jej cechy, jako asertoryczny — pod kategorię istnienia; czerwone róże są przedmiotami, które występują w wielu egzemplarzach jako realne i istniejące, jako substancje obdarzone daną cechą. Logikę transcendentalną dzieli Kant na transcendentalną analitykę i transcendentalną dialektykę, idąc za arystotelesowskim podziałem logiki, który analityką nazwał teorię sylogizmu, tj. wnioskowania apodyktycznego, a dialektyką — teorię wnioskowania, którego konkluzje mogą być zawodne. Transcendentalna analityka ma za zadanie wykrycie w poznaniu powszechnych a zarazem koniecznych pojęć i zasad, które czynią poznanie prawdziwym, oraz wykazanie, w jaki to staje się sposób. Rozwiązaniem tego zadania jest streszczony właśnie „transcendentalny wywód kategorii". Transcendentalna natomiast dialektyka ma wykryć błędy wynikające z zastosowania poznawczych form sądzenia poza granicami doświadczenia; takie mianowicie błędne ich zastosowanie wytwarza idee metafizyczne i prowadzi do twierdzeń antynomialnych.

Logika transcendentalna Kanta ma swój dalszy ciąg w filozofii idealistycznej Fichtego i Hegla oraz w filozofii nowokrytycznej. Johann Gottlieb Fichte (*Grundlage der gesammten Wissenschaftslehre*, 1794) i Georg Wilhelm Friedrich Hegel (*Wissenschaft der Logik*, 1812-16) pojmują logikę (Fichte używa terminu *Wissenschaftslehre*) jako analizę treści pojęć, postępującą od pojęć ogólnych i prostych ku coraz bardziej szczegółowym i złożonym według metody dialektycznej: tezy, antytezy i syntezy. Nazwa „dialektyka" jest tu użyta w sensie platońskim na oznaczenie nauki o działaniach nad pojęciami — lecz u Platona tezą i antytezą są dwa przeciwne gatunki, syntezą zaś — obejmujący je rodzaj, natomiast u Fichtego i Hegla nie można podać prawa, według którego teza i antyteza łączą się w syntezie, najczęściej tezą i antytezą są dwa gatunki przeciwne, a synteza jest czymś między nimi pośrednim w różnych znaczeniach tego wyrazu. Dodatkowym założeniem owej pokantowskiej logiki idealistycznej jest twierdzenie, że dialektyka pojęciowa jest zarazem przedstawieniem praw rozwoju historycznego.

W filozofii nowokrytycznej z końca w. XIX i początku w. XX logika ma za zadanie wykrycie apriorycznych założeń wiedzy, w szczególności fizyki teoretycznej. W tym sensie piszą między innymi Hermann Cohen (*Logik der reinen Erkenntnis*, 1902) oraz Paul Natorp (*Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften*, 1910).

b) Od Bolzana do Husserla

Przezwyciężenie psychologizmu w logice na całkowicie innej drodze aniżeli u Kanta inicjuje szereg myślicieli, którzy wychodzą v prawdzie od psychologii, jednak umieją uchwycić różnicę między opisem czynności myślenia i ujmowaniem związków logicznych.

Bernard Bolzano (*Wissenschaftslehre*, 1837) oddziela konsekwentnie dziedzinę logiki od psychologii, odróżniając przedstawienia jako takie i zdania jako takie (*Vorstellungen an sich* i *Sätze an sich*) od czynności psychicznych przedstawiania i sądzenia oraz prawdę jako taką (*Wahrheit an sich*) od przekonania. Rozróżnienie to stało się punktem wyjścia dla rozróżnienia między aktem psychicznym i jego treścią, przedstawianiem i przedstawieniem, sądzeniem i sądem u późniejszych autorów tego kierunku. Drugim ważnym punktem w logice Bolzana jest metoda badania związków logicznych przy założeniu zmienności pewnych części zdania. Tak otrzymuje Bolzano ze zdania np. „człowiek jest śmiertelny", podstawiając w nim za „człowiek" inne terminy, formę, która odpowiada całkowicie funkcji propozycjonalnej w logice Russella (zob. niżej). Franz Brentano (wykład logiki Brentana w książce jego ucznia: Franz Hillebrand, *Die neuen Theorien der kategorischen Schlüsse*, 1891) odróżnia logiczne związki prawdziwościowe od genetycznych zależności psychologicznych między myślami i daje oryginalną, jednolitą i konsekwentną teorię zdań sprowadzając różne ich formy do postaci egzystencjalnej. Wyniki logiczne zarówno Bolzana, jak Brentana zgadzają się w wielu istotnych punktach z późniejszą logiką matematyczną. Wychodząc od Bolzana i Brentana, Edmund Husserl (*Logische Untersuchungen*, 1900) dał jakby syntezę stanowiska antypsychologistycznego; wyodrębnił i zdefiniował psychologizm jako kierunek w logice oraz oparł jego krytykę na dokładnej charakterystyce różnicy, jaka zachodzi między prawami psychologii, nauki empirycznej, a twierdzeniami logiki, która nie jest nauką empiryczną. Prawa psychologiczne dotyczą związków motywacyjnych między przekonaniami, prawa logiczne zajmują się nie powstawaniem przekonań, lecz związkami, jakie zachodzą między zdaniami ze względu na ich prawdziwość, niezależnie od tego, czy wyrażają one czyjekolwiek przekonania. Kazimierz Twardowski (*O czynnościach i wytworach*, 1911) ujmuje stosunek między zjawiskiem psychicznym sądzenia i zdaniem w sensie logicznym jako stosunek czynności do jej wytworu: zdanie jest uzewnętrznionym i utrwalonym w słowie mówionym lub pisanym wytworem psychicznej czynności sądzenia.

4. Logika formalna do Leibniza

Logika psychologistyczna i transcendentalna są kierunkami ubocznymi, które wprowadzają do logiki zagadnienia psychologii poznania i epistemologii Literatura logiczna z w. XVI i XVII, kontynuująca logikę formalną w dawnym tego słowa znaczeniu, nie zawiera nowych zagadnień ani wyników. Autorami wybitniejszych opracowań podręcznikowych tego czasu są: portugalski jezuita Petrus Fonseca (*Institutionum dialecticarum libri octo*, 1564 — całkowicie w stylu scholastycznym), Jacobus Zabarella, padewski arystotelik (*Logica*, 1587), Marcin Śmiglecki, jezuita wileński, wysoko ceniony we Francji

i w Anglii (*Logica selectis disputationibus illustrata et in duos tomos distributa, Ingolstadii*, 1618, dwa dalsze wydania oxfordzkie z r. 1634 i 1658), Joachim Jungius (*Logica Hamburgensis*, 1638), Antoine Arnault i Pierre Nicole (*La Logique ou l'art de penser*, 1662 — cytowana zwykle jako *Logika Port-Royal*, zwięzły podręcznik logiki klasycznej z kartezjańskimi uzupełnieniami), Girolamo Saccheri (*Logica demonstrativa*, 1692 — jest to krótki wykład logiki w postaci zaksjomatyzowanej, realizujący postulat postawiony w tym względzie jeszcze przez Galenosa).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) nie pozostawił zwartego opracowania logiki, lecz w wielkiej liczbie szkiców, fragmentów, uwag, pochodzących ze wszystkich niemal okresów jego działalności filozoficznej, wypowiedział pomysły, które stały się punktem wyjścia nowoczesnego rozwoju logiki. Pomysły te zmierzają do utworzenia systemu symboli (*Characteristica universalis*, „*character*" znaczy tyle, co symbol), dla przedstawienia dowolnych przedmiotów i stosunków między nimi, podobnie jak symbole matematyczne przedstawiają liczby i ich związki. Owa *characteristica universalis* miałaby być narzędziem nauki ogólnej o rzeczach — *Mathesis universalis* (Leibniz nazywa ją też *Logica Mathematica i Logistica*) — jednym z działów tejże byłaby matematyka wielkości. Istotna w tym była myśl, że związki logiczne występujące w rozumowaniach są analogiczne do związków między liczbami, które tworzą podstawę działań rachunkowych w arytmetyce. Stąd wniosek, że rozumowanie jest rodzajem rachunku, Leibniz nazywa go *calculus ratiocinator*, czyli rachunkiem logicznym. Podobne przekonania były wygłaszane już dawniej, między innymi Tomasz Hobbes (*Elementarum Philosophiae sectio prima De Corpore*, 1655; część logiczna nosi tytuł *Computatio sive Logica*) nazywa logikę rachunkiem (*computatio*) i twierdzi „*ratiocinari idem est quod addere et subtrahere*". Dopiero jednak Leibniz wysnuł stąd właściwe konsekwencje, mianowicie potrafił zdefiniować działania logiczne na wzór działań arytmetycznych, ale z zachowaniem ich odrębności, wprowadził na ich oznaczenie symbole zamiast dotychczasowych oznaczeń słownych, a wreszcie sformułował szereg twierdzeń symbolicznych, które określają ich własności, podobnie jak twierdzenia arytmetyki określają własności działań arytmetycznych. Tak Leibniz stworzył nowoczesną logikę symboliczną (przynajmniej w zasadzie, podał bowiem jedynie jej program i fragmenty). Zarazem zaś wskazał drogę ku osiągnięciu tego, co zamierzył już Arystoteles, czego jednakże nikt do owej chwili dokonać nie zdołał, mianowicie objęcia jedną teorią rozumowań logiki i matematyki. Arystoteles postawił tu jedynie pierwszy krok przez wprowadzenie symboli zmiennych na oznaczenie członów stosunków logicznych; późniejsi (Saccheri) uczynili z logiki system zaksjomatyzowany na wzór geometrii Euklidesa; Leibniz zainicjował krok ostatni przez szczęśliwe uchwycenie istotnych własności stosunków logicznych i obmyślenie symboliki, która pozwala na należyte sformułowanie twierdzeń przedstawiających te własności.

5. Algebra logiki

Tymi, którzy zrealizowali pomysły Leibniza, byli logicy angielscy nie pozostający wprawdzie pod jego bezpośrednim wpływem, zapewne jednak posiadający wiadomości o jego logice przekazane drogą pośrednią, mianowicie za pośrednictwem wybitnego niemieckiego autora prac z dziedziny logiki i zwolennika logiki Leibniza, nazwiskiem Johann Heinrich Lambert (*Neues Organon*, 1764). Są to — wśród innych — Augustus de Morgan (*Formal Logic or the Calculus of Inference, necessary and probable*, 1847) i przede wszystkim George Boole (*The Mathematical Analysis of Logic*, 1847 oraz *An Investigation of the Laws of Thougt, on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities*, 1854). Logika Boole'a jest logiką nazw, w której trzy działania logiczne, generalizacja, specjalizacja i negacja, nazwane dodawaniem logicznym, mnożeniem logicznym i odejmowaniem logicznym, są pojęte na wzór odpowiednich działań arytmetycznych, a stosunki równoważności międzynazwowej i subsumcji tworzą równości i nierówności logiczne, analogiczne do równań i nierówności algebraicznych. Logika w tym przedstawieniu staje się teorią równań międzynazwowych, a jej problemy — problemami rozwiązywania tych równań ze względu na pewne ich wyrazy lub też eliminowania pewnych wyrazów z danego układu równań. Każde rozumowanie logiki klasycznej daje się przedstawić jako problem pierwszego lub drugiego rodzaju (np. sylogizm jako zagadnienie eliminacji terminu średniego), przy czym otrzymuje się rozwiązania o wiele bardziej różnorodne niż w logice klasycznej, gdyż wyczerpujące wszystkie możliwe przypadki.

Ze względu na analogie do arytmetyki i algebry system logiki Boole'a nosi nazwę algebry logiki lub logiki algebraicznej. Algebra logiki została rozwinięta przez wielu autorów w system bardzo obszerny. Należy do nich uczeń Boole'a William Stanley Jevons (*The Principles of Science*, 1874), autor szeroko rozpowszechnionych opracowań logiki o charakterze podręcznikowym i wynalazca maszyny logicznej, pozwalającej otrzymywać wnioski w sposób mechaniczny, podobnie jak arytmometry służą do mechanicznego wykonywania rachunków. John Venn (*Symbolic Logic*, 1881) łączy wykład algebry logicznej z licznymi informacjami historycznymi i bibliograficznymi. Amerykański logik Charles Saunders Peirce (1839—1914) w szeregu rozpraw rozszerzył algebrę logiki na teorię stosunków traktowaną w sposób analogiczny. Czołowe opracowanie algebry logiki wraz z teorią stosunków dał Ernst Schröder (*Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 1890-95). Louis Couturat (*L'algebre de la logique*, 1905) podaje zwięzły i przejrzysty jej wykład.

6. Logika matematyczna

Proces zbliżania się między logiką i matematyką był procesem dwustronnym, z jednej bowiem strony logika zbliżała się do matematyki przez coraz ogól-

niejsze ujmowanie związków i działań logicznych, z drugiej strony matematycy byli zmuszeni w miarę rozwoju swej nauki do zajmowania się jej budową logiczną. Matematyka była od czasów Platona i Arystotelesa modelem, według którego kształtowały się zapatrywania na logiczną budowę nauki w ogóle; rozwój badań nad logicznymi podstawami matematyki musiał przeto pociągnąć za sobą konsekwencje ważne dla całej logiki.

Już Saccheri zajmował się zagadnieniem wzajemnej niezależności logicznej aksjomatów geometrii Euklidesa. W szczególności aksjomat piąty wzbudzał wątpliwości; podejrzewano, że może on być udowodniony na podstawie przyjęcia pozostałych aksjomatów. Ów piąty aksjomat daje się sformułować w zdaniu: Przez punkt leżący poza prostą na danej płaszczyźnie przechodzi jedna i tylko jedna równoległa do owej prostej. Matematyk rosyjski Mikołaj Łobaczewski (w r. 1829) uczynił próbę udowodnienia wymienionego aksjomatu niewprost, przez doprowadzenie do sprzeczności założenia z nim niezgodnego, iż przez dany punkt na płaszczyźnie przechodzą dwie równoległe do danej prostej na tej samej płaszczyźnie. Okazało się jednak, że przy takim założeniu nie ma sprzeczności z pozostałymi aksjomatami i że konsekwencje jego dają nową postać geometrii, geometrię nieeuklidesową Łobaczewskiego. Następstwa odkrycia Łobaczewskiego dla logiki były niezmiernie doniosłe. Wykazało ono, wbrew zdaniu wygłoszonemu jeszcze przez Arystotelesa, że aksjomaty nauki dedukcyjnej nie są konieczne w tym sensie, by mogły być ustalone w jeden tylko sposób. Pojęcie absolutnej nauki dedukcyjnej, wychodzącej od oczywistych założeń i gwarantującej pewność wyników, musiało ustąpić miejsca pojęciu nauki hipotetyczno-dedukcyjnej, w której twierdzenia uznaje się w zależności od przyjętych na czele założeń.

Mniej więcej jednocześnie z powstaniem geometrii nieeuklidesowej matematyk i logik francuski J. D. Gergonne (1826) sformułował zasadę dualności twierdzeń geometrycznych. Orzeka ona, że twierdzenia geometrii rzutowej, dotyczące wzajemnego położenia punktów i prostych na płaszczyźnie lub punktów i płaszczyzn w przestrzeni, występują parami, w których jedno z twierdzeń przekształca się na drugie przez zamianę ze sobą wyrazów „punkt" i „prosta" (lub „płaszczyzna)", „leży na" i „przecina się"; tak np. twierdzenie „każde dwa punkty leżą na jednej prostej" przekształca się w ten sposób na „każde dwie proste przecinają się w jednym punkcie". Jeżeli zamiast wyrazów „punkt", „prosta" użyjemy symboli zmiennych, a wyrażenia takie, jak „leży na" lub „przeciną się", zastąpimy przez ogólne symbole stosunków lub inne funktory stosownie określone, to powstają twierdzenia ogólne, które dopuszczają rozmaite interpretacje, zależnie od tego, jakie znaczenie zostanie nadane symbolom funktorów i zmiennych. W ten sposób można zbudować „geometrię abstrakcyjną", w której operuje się symbolami abstrakcyjnymi, nie odwołując się do intuicji geometrycznej, będącej punktem wyjścia geometrii klasycznej. Znaleziono więcej jeszcze przykładów na abstrakcyjne

systemy hipotetyczno-dedukcyjne, dopuszczające odmienne i różne między sobą możliwości interpretacyjne. Odkrycia te okazały, wbrew powszechnie panującemu od Platona aż do Kanta zapatrywaniu, że geometria nie musi opierać się na intuicji przestrzennej, pozwoliły odróżnić w systemach dedukcyjnych to, co jest zaczerpnięte z intuicji zmysłowej, od elementów strukturalnych, a w ten sposób wskazały drogę do budowania teorii ściśle sformalizowanych.

Dalszym wkładem matematyki do logiki była analiza pojęcia nieskończoności. Newton i Leibniz stworzyli tzw. rachunek nieskończonościowy, którego podstawową myślą jest rozkładanie zmian wielkości badanych na dowolnie małe elementy (różniczkowanie) i następnie sumowanie owych elementów w obrębie dowolnie obranych odstępów (całkowanie). Metody rachunku nieskończonościowego wyjaśniły pojęcia ciągłości i ruchu, tak trudne do ujęcia dla myśli starożytnej. Bernard Bolzano (*Paradoxien des Unendlichen*, 1851) postawił i rozwiązał inne zagadnienie łączące się z pojęciem nieskończoności. Cechą charakterystyczną zbiorów nieskończonych jest, według tych rozważań Bolzana, posiadanie części właściwej (tj. różnej od całego zbioru), która jest równoliczna z całym zbiorem; tak np. zbiór liczb naturalnych rozkłada się na dwie części właściwe: zbiór liczb całkowitych dodatnich parzystych i zbiór liczb całkowitych dodatnich nieparzystych, przy czym każda z tych części jest równoliczna z całym zbiorem. Idąc dalej drogą wskazaną przez Bolzana, Georg Cantor stworzył w swoich rozprawach z lat 1878—1883 matematyczną teorię mnogości, złożoną z dwóch zasadniczych części: pierwsza zawiera analizę nieskończoności i rozróżnia jej rodzaje, druga zajmuje się uporządkowaniem elementów w zbiorach nieskończonych i wnika rozważaniami swymi w teorię stosunków.

Wszystkie te odkrycia wraz z rosnącą potrzebą krytycznej rewizji podstaw matematyki wiodły ku zadaniu zbudowania teorii rozumowania matematycznego. Zadanie to całkowicie analogiczne do zadania, jakie Arystoteles postawił sobie w stosunku do rozumowań stosowanych we współczesnej mu nauce, było punktem wyjścia logiki matematycznej, której twórcami stali się Giuseppe Peano we Włoszech oraz Gottlob Frege w Niemczech. Każdy z nich stworzył system odrębny i niezależny od drugiego. Wspólne im obu było posługiwanie się metodą symboliczną w duchu Leibniza, pozwalającą na przedstawienie rozumowań matematycznych w postaci ścisłej, z całkowitym pominięciem wyrażeń zaczerpniętych z języka potocznego. Każdy z nich stworzył w tym celu inną symbolikę, przy czym Peano był szczęśliwszy, gdyż jego symbolika okazała się bardziej przejrzystą i w dalszym rozwoju wyparła symbolikę Fregego.

Zasługą Peana (pierwsze prace 1888; *Revue de Mathématiques* i *Formulaire de Mathématiques* 1891—1905) była przede wszystkim analiza struktury

wewnątrzzdaniowej bardziej poprawna od analizy danej przez Arystotelesa. Podstawą tej analizy jest rozróżnienie znaczeń słowa „jest" w zdaniu jednostkowym i w zdaniu ogólnym. Frege (*Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, 1879: *Grundgesetze der Arithmetik*, 1893—1903) natomiast stał się twórcą nowoczesnej teorii zdań, którą pierwszy przedstawił w ściśle aksjomatycznej formie systemu dedukcyjnego, opartego na dwóch terminach pierwotnych, implikacji i negacji, oraz sześciu aksjomatach, przy zastosowaniu nadto dwóch jedynie reguł wnioskowania, podstawiania i odrywania.

Bertrand Russell (*The Principles of Mathematics*, 1903; Whitehead A. N. — Russell B. *Principia Mathematica*, 1910), oparłszy się na pracach Peana i Fregego, dał pełny system logiki matematycznej, obejmujący teorię zdań, teorię orzeczników (klas) i teorię stosunków. Dziełem Russella jest stworzenie z logiki zdań i logiki orzeczników, które rozwijały się w ciągu całej historii logiki obok siebie, jednej całości, w której logika zdań jest działem podstawowym, a logika orzeczników — jej nadbudową. Rezultat ten został osiągnięty za pomocą wprowadzenia pojęcia funkcji propozycjonalnej; orzeczniki występują jedynie w funkcjach propozycjonalnych, a wszelkie związki międzyorzecznikowe redukują się do związków między funkcjami propozycjonalnymi, identycznych ze związkami międzyzdaniowymi, gdyż funkcje propozycjonalne to nic innego, jak zmienne zdaniowe. Logika matematyczna w postaci, jaką jej nadał Russell, jest przeto uogólnieniem obejmującym w jednej całości oba systemy logiki klasycznej, logika stoicka jest częścią logiki zdań, a logika perypatetycka — fragmentem logiki orzeczników. Zarazem logika Russella spełnia program Arystotelesa w tym kierunku, że jest pierwszym systemem logiki, który uwzględnia metody rozumowania nauk dedukcyjnych łącznie z matematyką; jest to pierwsza logika całkowicie ogólna pod tym względem. Określenie „matematyczna" wskazuje jej punkt wyjścia i zadania bezpośrednie, lecz nie znaczy, by była ona ograniczona do dziedziny rozumowań matematycznych. Należy je rozumieć jako oznaczenie współczesnego stadium rozwojowego logiki, obejmującego także matematykę, w przeciwieństwie do stadiów dawniejszych logiki perypatetyckiej, stoickiej lub scholastycznej.

System Russella jest wreszcie pierwszym systemem logiki liczącym się ze sprzecznościami, jakich przykłady znano już w starożytności (paradoks kłamcy, paradoks krokodyla i in.) i jakie powstały również na tle nowoczesnej matematyki i logiki (paradoks Richarda, paradoks Russella). Dopiero tak subtelne narzędzie analizy logicznej, jakim operuje logika matematyczna, pozwoliło należycie sformułować owe paradoksy i znaleźć ich rozwiązanie w postaci teorii typów logicznych, ograniczającej dowolność uogólnień do pewnych granic.

7. Logika prawdopodobieństwa

W w. XVII powstaje matematyczna teoria prawdopodobieństwa z praktycznym celem obliczania prawdopodobieństwa wygranej w grach hazardowych; jej twórcami są Blaise Pascal (w listach do matematyka P. Fermat, ogłoszonych pośmiertnie, *Varia opera math. D. Petri de Fermat*, 1678), Christian Huyghens *(De ratiociniis in ludo aleae*, 1657) i zwłaszcza szwajcarski matematyk Jacques Bernouilli *(Ars coniectandi*, 1713). Matematyczna teoria prawdopodobieństwa mówi o prawdopodobieństwie zdarzeń i definiuje prawdopodobieństwo za pomocą zasady homogeniczności lub braku racji. Mianowicie dla obliczenia prawdopodobieństwa pewnego zdarzenia obiera się zbiór alternatyw przedstawiających możliwości, w których ono zajdzie lub nie zajdzie, i równorzędnych pod tym względem, że dla żadnej z nich nie istnieje racja uzasadniająca przypuszczenie, iż raczej ona się zrealizuje niż którakolwiek z pozostałych. Alternatywy noszą nazwę przypadków możliwych, te zaś spomiędzy nich, przy których zachodzi dane zdarzenie, są przypadkami sprzyjającymi. Prawdopodobieństwem zdarzenia jest stosunek liczby przypadków sprzyjających do liczby przypadków możliwych. Zasadą homogeniczności lub braku racji nazywa się przytoczone wyżej założenie, iż dla każdego zdarzenia, którego prawdopodobieństwo obliczamy, istnieje zbiór alternatyw homogenicznych, czyli jednorodnych w tym sensie, że dla żadnej z nich nie istnieje racja uzasadniająca przypuszczenie, iż raczej ona się zrealizuje niż którakolwiek z pozostałych. Np. przypuśćmy, że obliczamy prawdopodobieństwo otrzymania przy rzucie kostką parzystej liczby oczek. Zbiór przypadków możliwych składa się z sześciu alternatyw, każda z nich odpowiada otrzymaniu przy rzucie kostką jednej z sześciu ścianek oznaczonych kolejno liczbą oczek od 1 do 6. Zasada homogeniczności zakłada w tym przykładzie brak racji do przypuszczenia, że przy dowolnym rzucie otrzymamy pewną szczególną liczbę oczek — wszystkie są równie możliwe. Ponieważ zaś spomiędzy nich trzy dają liczbę parzystą, trzy zaś liczbę nieparzystą, przeto prawdopodobieństwo otrzymania liczby parzystej jest $3/6 = 1/2$.

Zastosowania matematycznej teorii prawdopodobieństwa zostały wkrótce rozszerzone na dziedzinę ubezpieczeń; w dziedzinie tej należało oprzeć się nie na ustalonej *a priori* alternatywie przypadków równie możliwych, lecz na empirycznych danych statystyki; przypadki możliwe są tu identyczne z tymi, które zostały zaobserwowane, sprzyjające zaś są wśród nich przypadki takie same, jak ten, którego stopień prawdopodobieństwa chcemy obliczyć. Jeżeli przeto pragniemy statystycznie ustalić prawdopodobieństwo, że człowiek dwudziestoletni dożyje czterdziestego roku życia, to winniśmy ustalić statystycznie, ilu spomiędzy dwudziestoletnich ludzi w danej populacji dożywa czterdziestego roku życia. Zasada homogeniczności, zrozumiała przy grach hazardowych, gdzie rzut kostką lub rozkład kart ma być w swym założeniu przy-

padkowy, tutaj — gdy chodzi o takie zdarzenia, jak dożycie osoby dwudziestoletniej do czterdziestego roku życia — staje się założeniem fikcyjnym, gdyż niezgodnym z dobrze znanymi różnicami indywidualnymi zdrowia i warunków życia, od których zależy długowieczność.

Powstało przeto odmienne od starożytnego zagadnienie prawdopodobieństwa, polegające na szukaniu teorii, która by objęła wszystkie typy rozumowania prawdopodobieństwowego i dała uzasadnienie wyników tego rozumowania. Pierwszy z pisarzy filozoficznych zajął się nim Dawid Hume *(Treatise on Human Nature,* 1739). Jego zasługą jest wskazanie związku między indukcją i prawdopodobieństwem w nowym znaczeniu. Hume rozróżnił dwa rodzaje prawdopodobieństwa, przypadkowe i przyczynowe. Z pierwszym mamy do czynienia w grach hazardowych, z drugim — w przypadkach osłabionych związków przyczynowych, gdy przyczyna, np. przyjęcie lekarstwa, nie zawsze wywołuje zamierzony skutek. Teoria prawdopodobieństwa Hume'a jest, podobnie jak jego teoria przyczynowości, teorią psychologistyczną i opiera się na tej samej zasadzie. Mianowicie prawdopodobieństwo obu rodzajów jest właściwością nie zdarzeń, lecz przekonań — jest siłą przekonania, w którym oczekujemy pojawienia się zdarzenia. Spostrzeżenie zdarzenia budzi dyspozycję do oczekiwania, iż powtórzy się ono znowu w takich samych okolicznościach; im więcej razy powtarzało się ono, tym ta dyspozycja jest silniejsza i tym większa siła przekonania, które ona budzi, natomiast każdy przypadek przeciwny dyspozycję tę osłabia. Tak przeto prawdopodobieństwo jako siła przekonania rośnie lub słabnie wraz z liczbą przypadków sprzyjających wśród przypadków możliwych i staje się pewnością w przypadku granicznym, gdy wszystkie przypadki możliwe są zarazem sprzyjającymi, jak w indukcji bezwyjątkowej.

Teoria Hume'a jest teorią subjektywnych przekonań o prawdopodobieństwach; powstały po niej teorie inne, usiłujące ująć prawdopodobieństwo od strony obiektywnej. Pierwszą z nich jest teoria częstościowa *(Frequency Theory)*, stworzona przez angielskich logików, głównie Joha Vena *(The Logic of Chance,* 1866); punktem jej wyjścia była krytyka zasady homogeniczności, która, zdaniem twórców teorii częstościowej, jest pozbawiona uzasadnienia i nie może służyć za przesłankę rozumowań prawdopodobieństwowych. W jej miejsce należy odwołać się do doświadczenia statystycznego. Teoria częstościowa zajmuje zatem stanowisko empirystyczne. Należy ustalać statystyczne szeregi obserwacji zarówno wtedy, gdy mamy do czynienia z hazardem, jak w przypadkach zjawisk ekonomicznych i społecznych, i opracowywać je metodami matematycznymi, aby otrzymać prawa prawdopodobieństwa. Podstawowe dla częstościowej teorii prawdopodobieństwa jest pojęcie szeregu. W szeregu zdarzeń pewnego zbioru (niech to będą np. rzuty kostką) istnieją, jak wskazuje obserwacja statystyczna, elementy z własnością *w* (np. wyrzucenie parzystej liczby oczek), wykazujące tendencję do występowania z prawidłowością

tym bardziej wyraźną, im dłuższy jest dany szereg. Jeżeli w pewnym szeregu złożonym z n elementów m elementów posiada własności w, to powiadamy, że własność w występuje w danym szeregu z prawdopodobieństwem m/n.

Teoria częstościowa ujmuje prawdopodobieństwo od strony matematycznej. Ze strony logicznej określał je już Bolzano jako stosunek między zdaniami, którego szczególnym przypadkiem jest stosunek racji do następstwa. John Maynard Keynes (*A Treatise on Probability*, 1921) zbudował logiczną teorię prawdopodobieństwa, która mówi, w przeciwieństwie do matematycznej teorii prawdopodobieństwa, o prawdopodobieństwie zdań, nie zaś o prawdopodobieństwie zdarzeń. Prawdopodobieństwo zdania określa się ze względu na jego przesłanki tak, iż jest ono stosunkiem między zdaniem i jego przesłankami. Różne prawdopodobieństwa mieszczą się między dwoma przypadkami skrajnymi, mianowicie między pewnością negatywną, gdy przesłanki zdania wykluczają je, i pewnością pozytywną, gdy je implikują. Wychodząc z tych określeń otrzymuje Keynes twierdzenia matematycznej teorii prawdopodobieństwa i stosuje je celem uzasadnienia metod rozumowania przez indukcję i analogię. Ścisłą analizę metod rozumowania indukcyjnego przeprowadził następnie, opierając się na założeniach Keynesa, Jean Nicod (*Le problème logique de l'induction*, 1924).

Połączenia teorii częstościowej z Keynesa teorią prawdopodobieństwa dokonał Hans Reichenbach (*Wahrscheinlichkeitslehre*, 1935), definiując prawdopodobieństwo jako stosunek między funkcjami propozycjonalnymi, nie zaś zdaniami; stopień prawdopodobieństwa zostaje ustalony przez częstość względną wartości argumentu, które spełniają funkcję propozycjonalną, stanowiącą poprzednik stosunku prawdopodobieństwa, w zbiorze wartości argumentu spełniających funkcję propozycjonalną w następniku tego stosunku. Teoria Reichenbacha została przedstawiona w poprzedniej części niniejszej książki.

Istnieją również czysto aksjomatyczne opracowania teorii prawdopodobieństwa, w których pojęcie prawdopodobieństwa wprowadza się przez system aksjomatów wystarczających do rozwinięcia teorii prawdopodobieństwa.

8. Okres współczesny rozwoju logiki

Okres współczesny rozwoju logiki od roku 1910, w którym ukazały się Whitehead-Russella *Principia mathematica*, charakteryzuje pogłębienie i rozszerzenie badań logicznych, idące w następujących zwłaszcza kierunkach:

a) Całkowitego opracowania teorii zdań, podstawowego działu logiki, jako systemu sformalizowanego, sprowadzenia jej do jedynego terminu pierwotnego i jedynego aksjomatu (Scheffer, Nicod, Łukasiewicz).

b) W związku z powyższym nastąpił rozwój metodologii budowy systemów aksjomatycznych, opracowanie metod badania niesprzeczności, niezależności

i zupełności układu aksjomatów, rozróżnienie aksjomatów i dyrektyw rozumowania (Łukasiewicz, Tarski, Gödel, Hilbert i jego szkoła, i in.).

c) Łącznie z tym doszło do wyodrębnienia dziedziny metalogiki oraz metamatematyki i ich opracowania (Carnap, Tarski).

d) Badania dotyczące systemów aksjomatycznych i ich struktury dały podstawy do stworzenia semantyki logicznej, czyli logicznej analizy języka naukowego (Leśniewski, Tarski, Ajdukiewicz, Carnap).

e) Powstały systemy logiki tzw. niearystotelesowskiej lub wielowartościowej (Post, Łukasiewicz, Brouwer).

f) Rozwinęła się wreszcie w ścisłym oparciu o inne działy logiki logiczna teoria prawdopodobieństwa i objęła sobą te działy rozumowania wraz z rozumowaniami przez indukcję i przez analogię, które pozostawały poza zakresem zainteresowań logiki klasycznej (Keynes, Reichenbach).

W dzisiejszym stanie swego rozwoju oraz swej techniki stała się logika specjalnością naukową uprawianą niezależnie od obu dziedzin naukowych, z których wyrosła, to jest filozofii i matematyki. Nie oznacza to jednak zerwania wzajemnego związku między nimi. Przez swój charakter badań całkowicie ogólnych pozostaje logika nauką filozoficzną i nikomu, kto pragnie uprawiać badania filozoficzne, w dziedzinie zwłaszcza metafizyki lub teorii poznania, nie wolno jej ignorować pod groźbą popadnięcia w płytkość i błędy. Z drugiej strony badacz w dziedzinie logiki, jeżeli nie ogranicza się do przyczynków najbardziej specjalnych, nie może obyć się bez gruntownej znajomości zagadnień ogólnofilozoficznych, gdyż nie zrozumie bez niej należycie własnych założeń i nie potrafi ująć ich z należytym pogłębieniem.

Także matematyka współczesna wiąże się z logiką tak licznymi węzłami, jak nigdy przedtem. Obie nauki posiadają działy graniczne, dostarczają sobie wzajemnie zagadnień i rozwiązań.

PRZYPISY

Pełne tytuły dzieł i rozpraw podane są w *Wykazie bibliograficznym*.

III

Asocjacyjna teoria znaków, w szczególności wyrazów mowy, jest bardzo dawnego pochodzenia. Leży ona, jak wolno przypuszczać, u podstawy określenia, jakie znajduje się u Hobbesa: „Nazwa jest dowolnie wybranym słowem, które służy za znak, aby wywołać w naszym umyśle myśl..." Określenie to powtarza i przyjmuje John Stuart Mill (*Logika*, t. I, rozdz. II, § 1). — Por. Höfler *Logik*, str. 55 (w odsyłaczu).

Myślenie symboliczne ze stanowiska teorii asocjacyjnej objaśnia przy sposobności analizy myślenia pojęciowego Twardowski, *O istocie pojęć*, IV, str. 22.

Pojęcie intencji znaczeniowej pochodzi od Husserla, *Logische Untersuchungen*, Bd. I, T. I. *Ausdruck und Bedeutung*, str. 23 i nast. Teoria intencji znaczeniowej rozwinięta w tekście jest referatem z rozprawy Ajdukiewicza *O znaczeniu wyrażeń*. W tejże rozprawie zawiera się krytyka teorii asocjacyjnej.

Szczegółowe omówienie pojęcia znaku w rozprawie Ossowskiego, *Analiza pojęcia znaku*.

112

W sprawie wyrażania: Twardowski *O czynnościach i wytworach*, § 30 i nast.; Ossowska *Słowa i myśli*; Walfisz *Wyraz i życie psychiczne*; także Kotarbiński, *Elementy*, część I, rozdz. 1.

O allogenicznej oraz idiogenicznej teorii sądów por. K. Twardowski *O idio- i allogenetycznych teoriach sądu, Przegl. Filozoficzny* r. X (1907), str. 476; Daniela Tennerówna *Istnienie jako „treść" sądzenia i sądu, Przegl. Filoz.* r. XVII (1914), str. 465.

121

Logika jako składnia nauk dedukcyjnych: Padoa *La logique déductive* — 20, str. 19.

Określenie reguł sensu i ich podział na empiryczne, aksjomatyczne i dedukcyjne pochodzi od Ajdukiewicza *Sprache und Sinn*. Por. też tegoż autora *Das Weltbild und die Begriffsapparatur*.

Analizie logicznej budowy języka jest poświęcona podstawowa monografia Carnapa *Logische Syntax der Sprache*.

122

Kategorie semantyczne określił i rozróżnił Husserl *Logische Untersuchungen*, Bd. II, T. I, § 10. Do badań nad podstawami nauk dedukcyjnych wprowadził je Leśniewski. Por. Ajdukiewicz *Główne zasady metodologii i logiki*, rozdz. I, § 3, str. 9 i 148; Kotarbiński *Elementy*, str. 67; Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 66.

O zdaniu atomowym: Whitehead-Russell *Principia Mathematica*, t. I, wyd. 2, 1925, str. 15.

Rozróżnienie nazw i orzeczników: Kotarbiński *Elementy*, str. 16 i nast., Ajdukiewicz *W sprawie uniwersaliów*; Carnap *Logische Syntax der Sprache*, str. 11 i nast. *(Eigennamen und Prädicate)*.

W sprawie terminu funktor: Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 10, ods. 7.

Paradoks klas został podany przez Russella *The Principles of Mathematics*, str. 79.

Rzędy kategorii semantycznych: Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 69.

Teoria typów logicznych: Whitehead-Russell *Principia Mathematica I*, str. 39 i nast. oraz str. 168 i nast. Por. też Carnap *Abriss der Logistik*, str. 19 i nast. oraz 30 i nast.; Ajdukiewicz *Die syntaktische Konnexität*.

123

Rozróżnienie wyrażeń pierwszego i drugiego stopnia (wyrażeń cudzysłowowych) wprowadził do logiki współczesnej Frege *Grundgesetze der Arithmetik* I, str. 4. W sprawie języków różnych stopni: Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 5, 18 i in. (język drugiego stopnia nosi nazwę metajęzyka): Carnap *Logische Syntax der Sprache (Objektsprache* i *Syntaxsprache)*.

Paradoks nazw heterosemantycznych i inne paradoksy omawia praca: Grelling u. Nelson *Bemerkungen zu den Paradoxien*...

Rozróżnienie logiki i nauki o języku logiki: Kokoszyńska *Logiczna składnia języka*; Tarski *O ugruntowaniu naukowej semantyki*.

211

Funkcje prawdziwościowe: Whitehead-Russell *Principia Mathematica* str. 120.

W sprawie interpretacji zdań pozornie złożonych, pojmowanych nie jako związki międzynazwowe: Kotarbiński *Elementy*, str. 207 i nast.; Carnap *Logische Syntax der Sprache*, str. 188 i nast.

212

Słownik i reguły składni języka teorii zdań: Łukasiewicz *Elementy logiki matemat.*, str. 59 i nast.

O tzw. marginesowym charakterze definicyj: Łukasiewicz *Elementy*, str. 53.

Idea definiowania terminów w uwikłaniu, tzn. w sposób analogiczny, jak zostają określone niewiadome w równaniach algebraicznych, pochodzi od Gergonne'a *Essai sur la théorie des définitions*; por. Enriques *Zur Gesch. der Logik*, 21, str. 109 i 160; także: Ajdukiewicz *Logiczne podstawy nauczania*, str. 39.

W sprawie niesprzeczności, niezależności i zupełności układów aksjomatów teorii dedukcji: Łukasiewicz *Elementy*, III, str. 99 i nast.

Zagadnienie niezupełności systemów aksjomatycznych obejmujących pojęcie liczby postawił i rozwiązał K. Gödel *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd. 38, 1931. Por. Carnap *Logische Syntax der Sprache*, str. 93 i nast.; Tarski *O ugruntowaniu naukowej semantyki*, str. 9(56); Mostowski *O zdaniach nierozstrzygalnych*.

Układ aksjomatów implikacyjno-negacyjny: Frege *Begriffsschrift*, *Grundgesetze der Arithmetik* I; Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 21 (435); Łukasiewicz *Elementy*, str. 45.

Układ aksjomatów alternatywno-negacyjny: Whitehead-Russell *Principia Mathematica* I; P. Bernays *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der Principia Mathematica*. *Mathematische Zeitschrift* 25, 1926; por. Hilbert-Ackermann *Grundzüge der theoretischen Logik*, str. 22 i nast; Łukasiewicz *Vollständigkeitsbeweis*.

Aksjomat Nicode'a: Jean Nicod *A reduction in the number of the primitive propositions of Logik*; por. Russell *Introduction*, str. 148 i nast.; Łukasiewicz *Uwagi o aksjomacie Nicoda*, str. 382.

Rozróżnienie tez logicznych i dyrektyw rozumowania pochodzi od Fregego *(Begriffsschrift)*, jakkolwiek już w logice scholastycznej znano analogiczne rozróżnienie koniunkcji kondycjonalnej i koniunkcji racjonalnej (715); por. Łukasiewicz *Elementy*, str. 9 oraz str. 63 i nast.

W sprawie określenia dedukcji jako rozumowania z ogółu o szczególe: Mill *Logika*, t. I, ks. II, rozdz. I § 3; Łukasiewicz *Uwagi o aksjomacie Nicoda i o dedukcji uogólniającej*, str. 366.

O równoznaczności wyrażeń w teoriach aksjomatycznych i w języku potocznym: Kotarbiński *Elementy*, str. 204 i nast.

Dyrektywa zastępowania wyrażeń równoważnych: Hilbert-Ackermann *Grundzüge der theoretischen Logik*, str. 25, Regel VI.

221—226

Podane tezy teorii zdań są wybrane po największej części z dzieł: Couturata *Algèbre de la logique*; Whitehead-Russella *Principia Mathematica*, t. I; Kotarbińskiego *Elementy*, Cz. III, rozdz. I, § 3; Łukasiewicza *Elementy*, II, § 5; Zawirskiego *Logika teoretyczna*, II, § 2.

W sprawie odczytywania tez logicznych w wyrazach języka potocznego: Leśniewski *O podstawach matematyki*, *Wstęp*, str. 180—181.

O tezie 221,9: Łukasiewicz *W obronie logistyki*, str. 11. Układ aksjomatów dla implikacji: Łukasiewicz *Elementy logiki matem.*, str. 77.

O tezie 222,3 jako zasadzie rozumowania znanego Euklidesowi: G. Vailati *Raisonnements par réduction à l'absurde*; Łukasiewicz *Elementy*, str. 26 i nast., str. 32, str. 47 i nast. Przykłady tez 222,3, 222,4 zaczerpnięte od Śleszyńskiego, *Teoria dowodu*.

O tezie 222,6, którą jako charakterystykę zdania fałszywego wymienia Duns Szkot: Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 434.

Do tezy 222,19: przykład zaczerpnięty z dyskusji w sprawie indeterminizmu fizyki kwantowej, por. Łukasiewicz *Logistyka a filozofia*, str. 116 i nast.

O tezie 222,20 i innych tezach stanowiących jedyny aksjomat układu implikacyjno-negacyjnego: Sobociński *Z badań nad teorią dedukcji*, str. 172—176 oraz przypisek 5, str. 187—190; Łukasiewicz *Logistyka a filozofia*, przypisek 10, str. 121 (9).

O tezach 223,7 i 223,8 w związku z definicją *Apq* za pomocą jedynej stałej logicznej *C*: Łukasiewicz *Elementy*, str. 88. Teza 224,27 była już znana w logice stoików, Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 9 (423).

Tezy 224,37 i 224,38 oraz 224,39 i 224,40 sformułował w postaci symbolicznej Augustus de Morgan *Formal Logic*, 1847. Były one jednak znane już w logice średniowiecznej, por. Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 432.

Zasada dualności między alternatywą i koniunkcją została sformułowana przez Peirce'a *(On an improvement)*, por. Padoa *La logique déductive*, 110, str. 82; Couturat *L'Algèbre de la Logique* 14, str. 21.

Prawa łączności dla równoważności: Leśniewski *Grundzüge eines neuen Systems* I, § 3, str. 16.

231

Pierwszym, który zwrócił uwagę na zupełność dowodów pod względem logicznym, był Frege *(Begriffsschrift)*. Postać dowodu zupełnego podana w tekście pochodzi od Łukasiewicza; por. Łukasiewicz *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej*, str. 610 i nast., przypisek; *Elementy*, str. 66.

Objaśnienie pojęcia systemu sformalizowanego: Ajdukiewicz *Logiczne podstawy nauczania*, 52, str. 58.

232

Przykłady zostały zaczerpnięte z dzieł wymienionych w przypisku 221—226.

241

Twórcą metody matrycowej jest Peirce *(On the Algebra of Logic)*, por. Łukasiewicz-Tarski *Badania nad rachunkiem zdań*, str. 3 ods. 5, Łukasiewicz *W obronie logistyki*, str. 11.

Twierdzenie, iż funktor *D* a także funktor *H* może być jedynym wyrazem pierwotnym teorii zdań, pochodzi od Sheffera *(A set of postulates)*. E. Zyliński *(Some remarks)* wykazał, że żadne inne funktory prawdziwościowe oprócz *D* i *H* własności tej nie posiadają.

O tautologiach: Wittgenstein *Tractatus*, 4, 46; Carnap *Abriss der Logistik*, 4b, str. 8; Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*, str. 25, 48, 366.

242

Zasada dwuwartościowości i logika wielowartościowa: Łukasiewicz *Philosophische Bemerkungen*, § 6, str. 63; *Anhang*: *Zur Geschichte des Zwei-*

wertigkeitssatzes, str. 75; Zawirski *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*, str. 18.

O zdaniach modalnych: Czeżowski *Arystotelesa teoria zdań modalnych*; Bocheński *Notes historiques*.

Logiką intuicjonistyczną: L. E. J. Brouwer *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*. Uwagi dotyczące matryc logiki intuicjonistycznej pochodzą od *int* Jaśkowskiego; por. *Recherches sur la logique*.

O zagadnieniu istnienia: Janiszewski *O realizmie i idealizmie w matematyce*.

Układ aksjomatów dla trójwartościowej logiki możliwości: Wajsberg *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań*; Słupecki *Der volle dreiwert. Aussagenkalkül*; Łukasiewicz *Znaczenie analizy logicznej dla poznania*, str. 376 oraz *Die Logik und das Grundlagenproblem*, str. 97.

Układ aksjomatów logiki intuicjonistycznej: A. Heyting *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*; Zawirski *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*; Łukasiewicz *Die Logik und das Grundlagenproblem*, str. 86.

243

Dowody niesprzeczności i niezależności implikacyjno-negacyjnego układu aksjomatów: Łukasiewicz *Elementy*, III, § 6, str. 99 i nast. Dowód zupełności dwuwartościowej teorii zdań: Łukasiewicz *Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls*.

311

Pojęcie funkcji propozycjonalnej pochodzi od Russella *The Principles of Mathem.* 22, str. 19 i nast.

Pojęcie i nazwa kwantyfikator (*quantifier*) pochodzi od Peirce'a *On the Algebra of Logic*, str. 197.

Terminy, generalizacja i specjalizacja na przekształcenie funkcji propozycjonalnych w zdania: Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*. § 6, str. 30.

Rozróżnienie funktorów i operatorów: Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 69, przyp. 65.

312—315

Wykład teorii funkcji propozycjonalnych z kwantyfikatorami według Hilbert-Ackermanna *Grundzüge der theoretischen Logik*, str. 53 oraz Reichenbacha *Wahrscheinlichkeitslehre*, str. 37 i nast.

316

Rozróżnienie implikacji materialnej i formalnej u Russell'a *Principles of Mathematics* 15, str. 14 i 40—45, str. 36 i nast. Por. też Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*, str. 32 i nast

Wynikanie implikacyjne i wynikanie inferencyjne: Kotarbiński *Elementy*, str. 202.

O funkcjach ekstensjonalnych i zasadzie ekstensjonalności: Russell Whitehead *Principia Mathematica* I, App. C, str. 659 i nast.; Carnap *Abriss de Logistik* 9e, str. 22; Carnap *Log. Syntax*, str. 188 i nast; por. też Ajdukiewicz *O stosowalności czystej logiki*.

321

Teoria zdań z kwantyfikatorami: Łukasiewicz *Elementy*, IV, 8, str 154—170.

322

O rozszerzonej teorii funkcji zdaniowych: Hilbert-Ackermann *Grundzüge der theoret. Logik*, Kap. 4, str. 82 i nast.

Prototetyka: Leśniewski *Grundzüge eines neues Systems der Grundl. d. Mathem.*

O tezie 322,3: Tarski *O wyrazie pierwotnym logistyki*.

323

Principium identitatis indiscernibilium i definicja identyczności: Couturat *Opuscules ...... de Leibniz*, str. 519. Por. Carnap *Abriss der Logistik*, 7a, str. 15. Analogiczne twierdzenie głosił Tomasz z Akwinu; *Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio.* (*Summa Theol.*, p. 1, qu. XL, art. 1,3) — por. W. Wilkosz *O definicji przez abstrakcję*, *Kwartalnik Filozoficzny* XIV (1937), str. 7.

324

W sprawie rozróżnienia typów i rzędów kategorii semantycznych: Carnap *Abr. der Logistik* 13, str, 30; Tarski *Pojęcie prawdy...* str. 69.

411

Funkcja orzecznikowa „x jest P" została wprowadzona do logiki matematycznej pod nazwą *appartenance* (przynależność) przez Peana. Peano używa skrótu „ε" (od „ἐστί") na oznaczenie funktora „jest". Zarazem Peano już ustalił, że każdą funkcję propozycjonalną można przedstawić w postaci przynależności; por. Padoa *La logique déductive*, 24, str. 22, oraz 59—60, str, 48—49. Twierdzeniu ostatnio przytoczonemu Russell nadał nazwę aksjomatu sprowadzalności; por. Couturat *Die Prinzipien der Logik* III, str. 160.

W sprawie interpretacji symbolu „Fx" por. Ajdukiewicz *Die syntaktische Konnexität*.

412

Zarówno Peano, jak Russell operują nie orzecznikami, lecz należącymi do nich klasami. Teorię orzeczników podał Leśniewski nazywając ją „ontologia", czyli teorią funktora „jest". Leśniewski *O podstawach matematyki*, rozdz. XI; *Ueber die Grundlagen der Ontologie*; Kotarbiński *Elementy*, str. 227—247 i 253—254. Podane tam określenia orzeczników złożonych są w szczegółach odmienne od naszych, ponieważ nie rozróżnia się tam kategorii semantycznych nazw i orzeczników, w skutek tego trzeba wyraźnie sformułować warunki istnienia i jedyności desygnatów nazw. Por. też Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*, 2, § 7.

413

Prawo odwrotności treści i zakresu: Wiegner *W sprawie zasady odwrotności*; Czeżowski *O zależności między treściami i zakresami pojęć*.

Zagadnienie klasyfikacji stosunków między zakresami pojęć postawił pierwszy Gergonne *(Essai de dialectique rationelle)* i rozróżnił opierając się na intuicji geometrycznej, jaką dają schematy Eulera, pięć rodzajów stosunków między dwoma zakresami. Analityczną zasadę podziału Gergonne'a podał Schröder *(Algebra der Logik*, tom II, 1) a potem w sposób prawie identyczny Śleszyński *(O logice tradycyjnej)*. Obaj oni biorą pod uwagę tylko zakresy wspólne orzeczników *S* i *P*, *S* i nie-*P*, nie-*S* i *P*, pomijają zaś zakres wspólny orzeczników nie-*S* i nie-*P* i wskutek tego nie odróżniają stosunku podprzeciwieństwa od stosunku niezależności i stosunku sprzeczności od stosunku przeciwieństwa. Por. Czeżowski *Zagadnienie Gergonne'a w logice klasycznej*, *Ruch Filozoficzny*, t. XI, 1928/9, str. 182a.

421

O określnikach (deskrypcjach): Peano *Notations*; Whitehead-Russell *Principia Math.* Por. Carnap *Abriss der Logistik*, str. 15.

422

Sprowadzenie zdań kategorycznych logiki klasycznej do związków implikacyjnych między funkcjami orzecznikowymi u Peany. Por. Padoa *La logique déductive*, 101 i nast., str. 76 i nast.

Rozróżnienie zdań ogólnych mocnych i słabych: Kotarbiński *Elementy*, str. 232, 233.

423

Zdania kategoryczne o zaprzeczonym podmiocie wymienia już Arystoteles *(Perihermeneias*, cap. 10, 19b). Jednak dopiero De Morganowi należy przypisać

uzupełnienie klasycznej czwórki zdań zdaniami o zaprzeczonym podmiocie. Por. Schröder *Algebra der Logik*, t. II, cz. I, § 39; Ladd-Franklin *Proposition*, str. 368.

424

Analiza zdania określnikowego: Russell *Introduction*.

431

Kwadrat logiczny u Boethiusa (*De interpretatione, ed. Migne*, t. 64, p. 321).

Teorią wniosków logiki klasycznej w szacie przedlogistycznej jest wyczerpująco przedstawiona w dziele J. N. Keynesa *Studies and Exercises in formal Logic*. Analiza tych wniosków z punktu widzenia logiki współczesnej: Ladd-Franklin *Sylogism*; Ajdukiewicz *Założenia logiki tradycyjnej*; Łukasiewicz *Elementy*, str. 170—190; Śleszyński *Teoria dowodu*, t. I.

432

Termin „obwersja" pochodzi od logika angielskiego A. Baine'a, niektórzy inni autorowie używają terminu „aequipollentia". Termin „inwersja" wprowadził J. N. Keynes *Studies and Exercises in Formal Logic*, str. 133, 139.

511

Twórcą teorii stosunków jest Peirce w rozprawie *Three papers*, III. Teorię Peirce'a rozwinął E. Schröder *Algebra und Logik der Relative*. Teoria Peirce'a-Schrödera interpretuje stosunki zakresowo jako zbiory par indywiduów. Teorię stosunków w interpretacji treściowej podał B. Russell *Sur la théorie des relations*. Wykład teorii stosunków zawierają między innymi następujące dzieła: Whitehead-Russell *Principia Mathematica* I, Carnap *Abriss der Logistik* (w skrócie z poprzedniego), A. Tarski *O logice matematycznej* (wiadomości elementarne).

O rzędach stosunków: Carnap *Abriss der Logistik* 13a, str. 30 i nast.; Tarski *Pojęcie prawdy*, str. 69, przyp. 65.

513

Sylogizmy niewprost, rozważane ogólnikowo przez Arystotelesa (*Anal. pr.*, I c. 36) stały się przedmiotem analizy u Joachima Jungiusa. Od niego zaczerpnął je Leibniz, który zainteresował się nimi jako rozumowaniem, nie dającym się ująć w schematy logiki tradycyjnej (Couturat *La logique de Leibniz*, Ch. III, § 15, str. 75). Stąd nabrały one rozgłosu i „De Morgan, jak podaje Jevons, zwykł był mawiać na swych wykładach, że cała logika arystotelesowska

nie wystarcza, aby wychodząc z założenia, że koń jest zwierzęciem, udowodnić, iż głowa konia jest głową zwierzęcia" (Śleszyński-Zaremba *Teoria dowodu*, t. I, str. 74).

522

Definicja liczby kardynalnej przez abstrakcję od zbiorów równolicznych pochodzi od Fregego *Grundlagen*, § 68, str. 79 i *Grundgesetze*, § 40, str. 57 oraz Russella *Principles*, str. 111 i nast.

Arytmetyka jako dział logiki: Couturat *Les principes des Mathém*, str. 26; Russell *Introd.*, str. 196 i nast.

Prawo abstrakcji pochodzi od Peana *Introduction au Notations de Logique Mathématique*, *Formulaire*, str. 45; Russell *Principles*, str. 166, 219, por. Couturat *Principes des Mathém.*, str. 49; Wiłkosz *Podstawy ogólne teorii mnogości*, str. 79 i nast. oraz *O definicji przez abstrakcję*.

523

Twórcą metody określania szeregów przez stosunek ancestralny jest Frege, *Begriffsschrift*, str. 55 i nast.; *Grundgesetze*, t. I, § 45, str. 59. Por. też Whitehead-Russell *Principia*, t. I, str. 569 i nast; Ajdukiewicz *Główne zas. metodologii nauk i logiki formalnej*, § 23, str. 118 i nast.

524

O klasyfikowaniu i szeregowaniu: Hempel-Oppenheim *Der Typusbegriff*.

525

O szeregujących logikach wielowartościowych: Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*, § 70, str. 367 i nast. W sprawie ich określenia matrycowego por. nadto Łukasiewicz *Interpretacja liczbowa teorii zdań* oraz *Philosophische Bemerkungen*, str. 72.

526

O izomorficzności stosunków i o strukturalnym systemie wiedzy: Russell *Introduction*; Carnap *Der logische Aufbau der Welt*, 11—16, str. 16 i nast.

611

Podany w tekście wykład teorii prawdopodobieństwa i jej konsekwencji logicznych opiera się na Reichenbacha *Wahrscheinlichkeitslehre*, przy uwzględnieniu niektórych myśli zaczerpniętych z J. M. Keynesa *A Treatise on Probability*.

621

W sprawie uzasadnienia konkluzji przy wyjaśnianiu: J. Nicod *Le problème logique de l'induction*, str. 65 i nast.; Ajdukiewicz *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej* § 38, str. 279 i nast. Twierdzenie o równoważności racji z koniunkcją jej nierównoważnych następstw: Ajdukiewicz *W sprawie odwracalności stosunku wynikania*.

622

O ujęciu stosunku między indukcją prostą i eliminacyjną: J. Nicod j. w. (*passim*).

O prawach bezwyjątkowych i przybliżonych: J. Metallmann *Wprowadzenie do zagadnień filozoficznych*, cz. I, 26—29, str. 85 i nast.

631

O logikach wielowartościowych metrycznych i modalnych: Reichenbach *Wahrscheinlichkeitslehre*, § 71, str. 374 i nast.; Zawirski *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*.

711

O znaczeniu Platona w historii dedukcji: Jordan *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej*; tenże *O matematycznych podstawach systemu Platona*.

Indukcja sokratyczna: Xenofont *Memorabilia*, 4, 2, 14 nn; por. Überweg-Praechter *Die Philosophie des Altertums*, 12 Aufl., str. 142.

712

O logice Arystotelesa: H. Scholz *Geschichte der Logik*, § 2, I, str. 22 i nast. Najobszerniejszą źródłową historią logiki starożytnej i średniowiecznej jest czterotomowe dzieło: Prantla *Geschichte der Logik im Abendlande*. Autor jego, zwolennik filozofii heglowskiej, nie ma jednak zrozumienia dla swoistych zagadnień logiki (por. Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 418, 420, 425, przyp. 23), jak tego dowodzą następujące jego słowa (t. I, str. 500): „... *die formale Logik verdient kein besseres Schicksal, als dass sie verhöhnt und mit Füssen getreten wird*" (logika formalna nie zasługuje na los lepszy, jak wyszydzenie i podeptanie nogami). Powołanie się na dzieło Prantla jest zaznaczone w tekście jako „Pr" z podaniem tomu i stronicy. Opracowaniem historii logiki, stojącym na wysokości dzisiejszego stanu wiedzy, choć bardzo zwięzłym, jest Scholza *Geschichte der Logik*.

713

O logice stoików: Łukasiewicz *O logice stoików*, oraz *Z historii logiki zdań*; Scholz j. w., § 2, II, str. 31 i nast.

715

O logice średniowiecznej: Überweg-Baumgarten *Grundriss der Gesch. der Philosophie der patristischen und scholastischen Zeit*, §§ 24, 25, 41; Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*; Kokoszyńska *Nauka o supozycji terminów według Piotra Hiszpana*; Salamucha *Logika zdań u Wilhelma Ockhama*; tenże *Pojawienie się zagadnień antynomialnych na gruncie logiki średniowiecznej*.

724

O logice Leibniza: Couturat *La logique de Leibniz*; por. Scholz *Geschichte der Logik*, § 3, I. O Śmigleckim Struve *Historia logiki*, str. 162, 186.

726

O zagadnieniach logicznych podstaw matematyki: Enriques *Zur Geschichte der Logik*, III, str. 101 i nast.

O logice Peana: Peano *Notations de Logique Mathématique*; Padoa *La logique déductive*.

O logice Fregego: Russell *Principles of Mathematics*, App. A, str. 501 i nast.; Łukasiewicz *Z historii logiki zdań*, str. 435 i nast.

727

Zarys historyczny teorii prawdopodobieństwa: Keynes *A Treatise on Probability*, rozdz. III, str. 79 i nast.

O prawdopodobieństwie u Hume'a: Rutski *Doktryna Hume'a o prawdopodobieństwie*.

WYKAZ BIBLIOGRAFICZNY

dzieł i rozpraw przytoczonych w *Przypisach*

Ajdukiewicz Kazimierz *W sprawie odwracalności stosunku wynikania*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XVI, 1913, str. 287—297.

— *Założenia logiki tradycyjnej*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXIX, 1926, str. 200—229 oraz r. XXX, 1927, 251—252.

— *Główne zasady metodologii nauk i logiki formalnej*. Skrypt z wykładów zredagował M. Presburger, Warszawa 1928 (Litografowane).

— *O znaczeniu wyrażeń*. *Odbitka z Księgi Pamiątkowej Polskiego Towarzystwa Filozoficznego*, Lwów 1931.

— *W sprawie „uniwersaliów"*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXVII, 1934, str. 219—234. Zob. też *Ruch Filozoficzny*, t. XIII (1932—1935/6), str. 40b, autoreferat: *W obronie uniwersaliów*.

— *Sprache und Sinn*. *Erkenntnis*, IV Bd, 1934, Heft 2, str. 100—138.

— *Das Weltbild und die Begriffsapparatur*. *Erkenntnis*, IV Bd., 1934, Heft 4, str. 259—287.

— *O stosowalności czystej logiki do zagadnień filozoficznych*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXVII, 1934, str. 323—327.

— *Logiczne podstawy nauczania*. Odbitka z *Encyklopedii Wychowania*, Warszawa 1934.

— *Die syntaktische Konnexität*. *Studia Philosophica*, Vol. I, 1935, str. 1—28.

Bocheński J. M. *Notes historiques sur les propositions modales*, Extrait de *la Revue des Sciences Philosophiques et Théologiques*, XXVI (1937), Paris, str. 673—692.

Brouwer L. E. J. *Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe*. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 33, 1925.

Carnap Rudolf *Der logische Aufbau der Welt*, Berlin 1928.

— *Abriss der Logistik*, Wien 1929.

— *Logische Syntax der Sprache*, Wien 1934.

Couturat Louis *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris 1901.

— *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, Paris, 1903

— *L'Algèbre de la Logique*, Paris 1905.

— *Les principes des Mathématiques*, Paris, 1905.

— *Die Prinzipien der Logik*, w zbiorze Windelband-Ruge, *Encyklopädi*, *der philosophischen Wissenschaften*, Bd. I; *Logik*, Tübingen 1912 str. 137—201.

Czeżowski Tadeusz *O zależności między treściami i zakresami pojęć*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXV, 1932, str. 70—80.

— *Arystotelesa teoria zdań modalnych*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXIX, 1936, str. 232—241.

Enriques Federigo *Zur Geschichte der Logik*, *Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker*. Deutsch von L. Bieberbach, Leipzig und Berlin 1927.

Frege Gottlob *Begriffsschrift, eine der mathematischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle 1897.

— *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau 1884. (Neudruck 1934).

— *Grundgesetze der Arithmetik*, Bd. I., Jena 1893; Bd. II., Jena 1903.

Gergonne J. D. *Essai de dialectique rationelle*, *Annales de Mathématiques*, Toulouse, t. VII, 1816, str. 189.

— *Essai sur la théorie des définitions*, *Annales de Mathématiques*, t. IX, Toulouse 1819, str. 1.

Grelling K. u. Nelson E. *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti*. *Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge*, II, 1908, str. 307.

Hempel dr Carl G. u. Oppenheim dr Paul *Der Typusbegriff im Lichte der neuen Logik*. *Wissenschottliche Untersuchungn zur Konstitutionsforschung und Psychologie*, Leiden 1936.

Heyting A. *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physik.-mathem. Klasse*, 1930.

Hilbert D. u. Ackermann W. *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin 1928.

Höfler Alois *Logik*. Zweite sehr vermehrte Auflage, Wien-Leipzig 1922.

Husserl Edmund *Logische Untersuchungen*, Bd. I, II 1, II 2, III Aufl. 1922.

Janiszewski Zygmunt, *O realizmie i idealizmie w matematyce*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XIX, 1916, str. 161—170.

Jaśkowski Stanisław *Recherches sur la logique intuitioniste*. *Actes du Congrès de la Philosophie Scientifique*. Paris 1936, str. 58.

Jordan Zbigniew *Platon odkrywcą metody aksjomatycznej*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XL, 1937, str. 57—67.

— *O matematycznych podstawach systemu Platona*. *Z historii racjonalizmu*, Poznań 1937.

Keynes John Maynard *A Treatise on Probability*, London 1921.

Keynes John Neville *Studies and Exercises in Formal Logic*, 4-th ed., London 1906.

Kokoszyńska Maria *Nauka o supozycji terminów według Piotra Hiszpana*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXVII, 1934, str. 235—261.

— *Logiczna składnia języka, semantyka i logika wiedzy*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXIX, 1936, str. 38—49.

Kotarbiński Tadeusz *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*, Lwów 1929.

Ladd-Franklin C. *Proposition*. Baldwin *Dictionary of Philosophy and Psychology*, new ed. 1920, t. II, str. 361—370.

— *Syllogism*, Baldwin, j. w., str. 628—639.

Leśniewski Stanisław *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik. Einleitung und § 1—11*. Odbitka z *Fundamenta Mathematicae*, XIV, Warszawa 1929.

— *O podstawach ontologii Über die Grundlagen der Ontologie*. Odbitka ze *Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, XXIII, 1930. Wydział III, 1930.

— *O podstawach matematyki*:

Wstęp i rozdz. I—III. Odb. z *Przeglądu Filozoficznego*, rocz. XXX, 1927, str. 164—206.

rozdz. IV. Odb. z *Przeglądu Filozoficznego*, rocz. XXXI, 1928, str. 261—291.

rozdz. V. Odb. z *Przeglądu Filozoficznego*, rocz. XXXII, 1929, str. 60—101.

rozdz. VI—IX. Odb. z *Przeglądu Filozoficznego*, rocz. XXXIII, 1930, str. 77—105.

rozdz. X—XI. Odb. z *Przeglądu Filozoficznego*, rocz. XXXIV, 1931, str. 142—170.

— *Einleitende Bemerkungen zur Fortsetzung meiner Mitteilung u. d. T. Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*. Odb. z *Collectanea Logica*, t. I., Warszawa 1939, str. 1—60.

— *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik*. Odb. z *Collectanea Logica*, t. I., Warszawa 1939, str. 61—144.

Łukasiewicz Jan *O logice stoików*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXX, 1927, str. 278—279.

— *O znaczeniu i potrzebach logiki matematycznej*, *Nauka Polska*, t. X; 1929, str. 604—620.

— *Elementy logiki matematycznej*. Skrypt autoryzowany opracował M. Presburger, Warszawa 1929 (Litografowane).

— *Interpretacja liczbowa teorii zdań*, *Ruch Filozoficzny*, t. VII, 1923, str. 92b.

— *Uwagi filozoficzne o wielowartościowych systemach rachunku zdań (Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (Odb. ze *Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, XXIII, 1930. Wydział III, Warszawa, 1930).

— *Uwagi o aksjomacie Nicoda i o „dedukcji uogólniającej"*. Odb. z *Księgi Pamiątkowej Polskiego Towarzystwa Filozoficznego we Lwowie* Lwów 1931

— *Dowód zupełności dwuwartościowego rachunku zdań. (Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Aussagenkalküls.)* Odb. ze *Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, XXIV, 1931. Wydział III, Warszawa 1932 str. 153—183.

— *Znaczenie analizy logicznej dla poznania, Przegląd Filozoficzny*, roczn. XXXVII, 1934, Warszawa 1934, str. 369—377.

— *Z historii logiki zdań, Przegląd Filozoficzny*, roczn. XXXVII, 1934, Warszawa 1934, str, 417—437.

— *W obronie logistyki*. Odb. z pracy zbiorowej *Myśl katolicka wobec logiki współczesnej, Studia Gnesnensia* XV, Poznań 1937.

— *Die Logik und das Grundlagenproblem, Les Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques*, Zurich 1941, str. 82—100.

— i Tarski A. *Badania nad rachunkiem zdań (Untersuchungen über den Aussagenkalkü)*. Odb. ze *Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, XXIII, 1930. Wydz. III, Warszawa 1930.

Metallmann dr Joachim *Wprowadzenie do zagadnień filozoficznych*, cz. I, Kraków 1939,

Mill John Stuart *System of Logic ratiocinative and inductive*, vol. I, II. Eight Ed. London, 1872.

Mostowski Andrzej *O zdaniach nierozstrzygalnych w sformalizowanych systemach matematyki, Kwartalnik Filozoficzny*, XVI (1946), str. 223—277.

Nicod Jean *A reduction in the number of the primitive propositions of Logic. Proceedings Cambridge Philos. Soc.*, vol. XIX, 1917.

— *Le problème logique de l'induction*. Paris 1924.

Ossowska Maria *Słowa i myśli, Przegląd Filozoficzny*, roczn. XXXIV, 1931. Warszawa 1931, str. 201—258.

Ossowski Stanisław *Analiza pojęcia znaku, Przegląd Filozoficzny*, roczn. XXIX, 1926, Warszawa 1926, str. 29—56.

Padoa Alessandro *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*. Paris 1912.

Peano G. *Notations de Logique Mathématique*, Torino 1894.

Peirce Ch. S. *Three Papers of Logic*. III. *Notations for the Logic of Relatives. Proc. of the Am. Ac. of Sc*, 1860/70.

— *On an improvement in Boole's calculus of logic. Proc. Am. Acad. Arts and Sc.* 7 (1867).

— *On the Algebra of Logic. A contribution to the philosophy of notation. American Journal of Mathematics* VII, 1885.

Prantl Carl *Geschichte der Logik im Abendlande (Manuldruck der Originalausgabe)*, Leipzig 1927 (Pierwsze wydanie 1855—1870).

Reichenbach Hans *Wahrscheinlichkeitslehre. Eine Untersuchung über die logischen und mathematischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leiden 1935.

Russell Bertrand *Sur la Logique des relations avec des applications à la théorie des séries, Revue de Mathématiques de G. Peano*, t. VII, Turin 1902, str. 115—147.

— *The Principles of Mathematics*, vol. I., Cambridge 1903.

— *Introduction to Mathematical Philosophy*, London 1919.

Rutski Jan *Doktryna Hume'a o prawdopodobieństwie. Uwagi w sprawie jej interpretacji*. Tow. Nauk. w Toruniu, Toruń 1948.

Salamucha X. Jan *Logika zdań u Wilhelma Ockhama*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXVIII, 1935, str. 208—239.

— *Pojawienie się zagadnień antynomialnych na gruncie logiki średniowiecznej*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XL. 1937, str. 68—69 i 320—343.

Scholz prof. dr Heinrich *Geschichte der Logik (Geschichte der Philosophie in Längsschnitten 4)*, Berlin 1931.

Schröder Ernst *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Bd. 1, Leipzig 1890; Bd. 2. 1. Abt., Leipzig 1891; Bd. 2. 2 Abt., Leipzig 1905.

— *Algebra und Logik der Relative, der Vorlesungen über die Algebra der Logik* dritter Band. Erste Abteilung Leipzig 1895.

Sheffer Henry Maurice *A set of five independent postulates for Boolean Algebra with Application to logical constants. Trans. Am. Math. Soc.* vol. XIV, 1913, str. 481—488.

Słupecki J. *Der volle dreiwertige Aussagenkalkül*. Odb. ze *Sprawozdań z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego*, XXIX, 1936, Wydział III, str. 9—11.

Sobociński Bolesław *Z badań nad teorią dedukcji*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXV, 1932, str. 171—193.

— *Aksjomatyzacja pewnych wielowartościowych systemów teorii dedukcji. Roczniki prac naukowych Zrzeszenia Asystentów Uniwersytetu Józefa Piłsudskiego* w Warszawie. Wydział Matem.-Przyr. t. 1, nr 1, Warszawa 1936, str. 399—419.

Stamm Edward *Algebra logiki*. Odb. z *Wiadomości Matematycznych*, t. XV i XVI, Warszawa 1912, str. 119.

Struve Henryk *Historya logiki jako teoryi poznania w Polsce*, Warszawa 1911.

Śleszyński Jan *O logice tradycyjnej*, Wydawnictwo *Towarzystwa Filozoficznego* w Krakowie, nr 8, Kraków, 1921 str. 11.

— *Teoria dowodu* według wykładów uniwersyteckich prof. dra Jana Śleszyńskiego opracował S. K. Zaremba, Kraków, t. I, 1925; t. II, 1929.

Tarski Alfred *O wyrazie pierwotnym logistyki. Przegląd Filozoficzny*, roczn. XXVI, 1923, str. 68—89.

— *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*. Warszawa 1933.

— *O ugruntowaniu naukowej semantyki*, *Przegląd Filozoficzny*, rocz. XXXIX, 1936, str. 50—57.

— *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej (Biblioteczka Matematyczna* 3—4—5*)*, Książnica „Atlas", Lwów—Warszawa (bez roku).

Twardowski Kazimierz *O czynnościach i wytworach*. Odbitka z *Księgi Pamiątkowej ku uczczeniu 250 rocznicy założenia Uniwersytetu Lwowskiego przez króla Jana Kazimierza*, Lwów 1912. Przedruk w zbiorze: *Rozprawy i artykuły filozoficzne*, Lwów 1927.

— *O istocie pojęć*. Lwów 1924.

Ueberweg Friedrich *Grundriss der Geschichte der Philosophie der patristischen und scholastischen Zeit*. Zehnte Auflage, herausgegeben von Dr. Matthias Baumgartner, Berlin 1915.

Vailati G. *Sur une classe remarquable de raisonnements par réduction à l'absurde. Revue de Mètaphysique et de Morale*, 1904.

Wajsberg M. *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań. Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego Warszawskiego* XXIV, 1931, Warszawa 1932, str. 126—148.

Wallis Mieczysław *Wyraz i życie psychiczne*, Wilno 1939.

Whitehead Alfred North and Russell Bertrand *Principia Mathematica*, vol. I, Second Ed., Cambridge 1925.

Wiegner Adam *W sprawie zasady odwrotności między treścią a zakresem pojęcia*. Odb. z III t. *Prac Komisji Filozoficznej Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk*, Poznań 1930.

Wilkosz Witold *Podstawy ogólnej teorii mnogości*, Warszawa 1925.

— *O definicji przez abstrakcję*, *Kwartalnik Filozoficzny*, t. XIV, 1937 str. 1—13.

Wittgenstein Ludwig *Tractatus Logico-Philosophicus*, London 1922.

Zawirski Zygmunt *Stosunek logiki wielowartościowej do rachunku prawdopodobieństwa*. Odb. z IV tomu *Prac Komisji Filozoficznej Poznańskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk*, Poznań 1934, str. 155—240.

Zawirski Zygmunt *Logika teoretyczna*, Kraków 1938. (Litografowany skrypt z wykładów uniwersyteckich).

— *Geneza i rozwój logiki intuicjonistycznej*, *Kwartalnik Filozoficzny*, XVI (1946) str. 165—222.

Żyliński Eustachy *Some remarks concerning the theory of deduction*. *Fundamenta Mathematica* VII, 1925.

253

ZESTAWIENIE OZNACZEŃ SYMBOLICZNYCH

a) Paragraf lub numer porządkowy definicji
b) Nazwa znaku
c) Jego postać
d) Brzmienie w czytaniu

a	b	c	d
122	zmienne zdaniowe	*p, q, r,...*	p, q, r,...
	nazwy	*a, b, c,...*	a, b, c,...
	zmienne nazwowe	*x, y, z,...*	x, y, z,...
	orzeczniki	*A, B, S, P, Q,...*	A (duże), B (duże), S, P, Q,...
	zmienne orzecznikowe	*X, Y, Z,...*	X (duże), Y (duże),...
212	negacja przyzdaniowa	*Np*	nie p
	implikacja	*Cpq*	jeżeli p, to q
	równoznaczność definicyjna	„="	znaczy to samo, co
212-I	alternatywa	*Apq*	p lub q
212-II	koniunkcja	*Kpq*	p i q
212-III	dysjunkcja	*Dpq*	p albo q
212-IV	równoważność	*Epq*	zawsze i tylko, jeżeli p, to q
241	równowartość logiczna	=	jest (sc. równowartościowe)
311	funkcja propozycjonalna	*fx, gx, hx,...*	f od x, g od x, h od x...
311	kwantyfikator ogólny	(*x*)	dla każdego x:
311	kwantyfikator szczegółowy	(*Ex*)	dla pewnego x: (lub: istnieje takie x, że...)
323,5	stosunek identyczności	*Ixy*	x jest (identyczne z) y
324	typy i rzędy kategorii semantycznych	*t*(*o*), *t*(*t*(*o*))...	kat. semant. typu t(o) rzędu 1, typu t(t(o)) rzędu 2...
411	funkcja orzecznikowa	*Px, Qx,...*	x jest P, x jest Q,

a	b	c	d
411	funkcja orzecznikowa *in abstracto*	$P\hat{x}$, $Q\hat{x}$	własność P (w interpretacji treściowej) lub klasa P (w interpretacji zakresowej)
412-I	Negacja orzecznika	$\mathbf{N}Px$	x jest nie P
412-II	Suma orzeczników	$\mathbf{A}PSx$	x jest P lub S
412-III	Iloczyn orzeczników	$\mathbf{K}PSx$	x jest P i S
412-IV	Dysjunkcja orzeczników	$\mathbf{D}PSx$	x jest P albo S
412-V	Subsumcja orzeczników	$\mathbf{C}PSx$	x, które jest P, jest S
412-VI	Równoważność „	$\mathbf{E}PSx$	tylko x, które jest P, jest S
412-VII	Orzecznik uniwersalny	$\mathbf{U}x$	x jest czymś
412-VIII	„ zerowy	$\mathbf{Z}x$	x nie jest niczym (nie ma x)
421-I	Określnik (deskrypcja, orzecznik jednostkowy)	Oa	a jest (jedynym) O
422-I	Zdanie ogólne twierdzące	SaP lub aSP	każde S jest P
422-X	„ „ przeczące	SeP lub eSP	żadne S nie jest P
422-XV	„ szczeg. twierdz.	SiP lub iSP	niektóre S są P
422-XVIII	„ „ przecz.	SoP lub oSP	niektóre S nie są P
423-I	Zdania o podmiocie zaprzeczonym	$Sa'P$ lub $a'SP$	każde nie S jest P
		$Se'P$ lub $e'SP$	żadne nie S nie jest P
		$Si'P$ lub $i'SP$	niektóre nie S są P
		$So'P$ lub $o'SP$	niektóre nie S nie są P
424-I	Zdanie określnikowe (deskrypcyjne)	PO	(jedyne) O jest P
432	Odwrócenie proste (konwersja zdania)	$ceSP$, $ciSP$	żadne P nie jest S, niektóre P są S
511	Relacja (stosunek) dwuczłonowy	Rxy	x pozostaje w stosunku R do y
511	Rel. (stos.) dwuczłon. *in abstracto*	$R\hat{x}\hat{y}$	stosunek dwuczłonowy R
512-I	Negacja relacji	$\mathfrak{A}Rxy$	x pozostaje (jest) w stosunku nie R do y
512-II	Suma relacyj	$\mathfrak{N}RSxy$	x pozostaje (jest) w stosunku R lub S do y
512-III	Iloczyn relacyj	$\mathfrak{K}RSxy$	x pozostaje (jest) w stosunku R i S do y
512-IV	Dysjunkcja relacyj	$\mathfrak{D}RSxy$	x pozostaje (jest) w stosunku R albo S do y

a	b	c	d
512-V	Subsumpcja relacyj	$\mathfrak{C}RSxy$	x, które jest w stosunku R do y, jest w stosunku S do y
512-VI	Równoważność relacyj	$\mathfrak{E}RSxy$	tylko x, które jest w stosunku R do y, jest w stosunku S do y
512-VII	Relacja uniwersalna	$\mathfrak{U}xy$	x jest w stosunku uniwersalnym do y
512-VIII	Relacja zerowa	$\mathfrak{Z}xy$	x jest w stosunku zerowym do y
513-I	Orzecznik względny: poprzednik R-owy ygreka	$R'^{y}x$	x jest R-owym poprzednikiem ygreka
513-II	Następnik R-owy iksa	$R^{\backprime x}y$	y jest R-owym następnikiem iksa
513-III	R-owy poprzednik pewnego S	$R^{»S}x$	x jest R-owym poprzednikiem pewnego S
514-I	konwersja (odwrotność) stosunku Rxy	^{c}Rxy	x pozostaje w stosunku R odwrotne do y
515-I	Iloczyn względny Rxy i Sxy	$\mathfrak{P}RSxy$	x jest w stosunku R względem S do y
515,II	Potęgi stosunku Rxy	$R^{n}xy$	x jest do y w stosunku R do potęgi n
515-IV	Suma względna	$\mathfrak{S}RSxy$	x jest w stosunku R do każdego, kto nie jest w stosunku S do y
521-III	Funkcja deskryptywna	$R^{\rightarrow y}x$	x jest jedynym R-owym poprzednikiem ygreka
521-IV	Zdanie z funkcją deskryptywną	$PR^{\rightarrow y}$	jedyny R-owy poprzednik ygreka jest P-em
522-I	Odpowiedniość doskonała	$\overline{Do}R\hat{x}\hat{y}$	$R\hat{x}\hat{y}$ jest odpowiedniością doskonałą
522-II	Równoliczność zbiorów	$\overline{Rl}f\hat{x}g\hat{x}$	zbiory $f\hat{x}$ i $g\hat{x}$ są równoliczne
522-III	Liczba kardynalna 0	$Of\hat{x}$	$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie zero
522-IV	„ „ 1	$lf\hat{x}$	$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie jeden

a	b	c	d
522-V	Liczba kardynalna 2	$2f\hat{x}$	$f\hat{x}$ jest funkcją o zakresie dwa
523-I	Stosunek porządkujący	$\overline{Ord}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$	zakres $f\hat{x}$ jest uporządkowany przez stosunek $R\hat{x}\hat{y}$
523-II	Stosunek dziedziczenia	$\overline{Her}f\hat{x}R\hat{x}\hat{y}$	własność $f\hat{x}$ dziedziczy się według stosunku $R\hat{x}\hat{y}$
526-I	Izomorficzność stosunków	$\overline{Iz}P\hat{x}\hat{y}R\hat{w}\hat{z}$	stosunek $P\hat{x}\hat{y}$ jest izomorficzny ze stosunkiem $R\hat{w}\hat{z}$
611-I	Prawdopodobieństwo implikacyjne	$C_p fxgx$	jeżeli fx, to prawdopodobnie w stopniu p gx
612-I	Stopień prawdopodobieństwa	$P(fx, gx)$	stopień prawdopodobieństwa od fx do gx
631-I	Prawdopodobieństwo predykatywne	$P((gxi))$	stopień prawdopodobieństwa funkcji $g\hat{x}$ w zbiorze x_i
633-I	Konieczność	$\overline{Nec}fx_i$	w zbiorze x_i jest konieczne, że fx
„	Możliwość	$\overline{Pos}fx_i$	w zbiorze x_i jest możliwe, że fx
„	Niemożliwość	$\overline{Imp}fx_i$	w zbiorze x_i jest niemożliwe, że fx

INDEKS NAZWISK

(Liczby wskazują paragrafy, litera „p” oznacza przypisy)

INDEKS RZECZOWY

E

F

J

K

L

277

Spis treści

Część 3

TEORIA KWANTYFIKATORÓW

Część 4

TEORIA ORZECZNIKÓW

Część 5

TEORIA STOSUNKÓW

Część 6

TEORIA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Część 7

ZARYS ROZWOJU LOGIKI